

Записки
към курса по
Лазерни Методи за Диагностика и Контрол

Християн Ю. Стоянов

София, 2006

СЪДЪРЖАНИЕ

1. ЛАЗЕРНА ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ

- 1.1 Увод
- 1.2. Класификация на интерферометрите
- 1.3. Аналитичен сигнал към реално поле
 - 1.3.1 Някои свойства на аналитичният сигнал
- 1.4. Обобщен закон за двулъчева интерференция
- 1.5. Степен на кохерентност в някои частни случаи
 - 1.5.1. Пълна взаимна некохерентност на две полета
 - 1.5.2. Пълна взаимна кохерентност на две полета
 - 1.5.3. Два точкови квазимонохроматични източника
 - 1.5.4. Площен квазимонохроматичен, пространствено некохерентен източник
- 1.6. Форма на интерференционните ивици и разстояние между тях
- 1.7. Векторен и матричен метод за пресмятане на системи с огледала
- 1.8. Влияние на поляризацията

СЕМИНАР №1

2. ИЗМЕРВАНЕ НА РАЗСТОЯНИЯ

- 2.1. Интерферометрични методи за измерване на разстояния
 - 2.1.1. Типични конструкции на честотно-стабилизирани лазери
 - 2.1.2. Основни принципи на интерферометричният метод
 - 2.1.3. Оптични схеми на лазерни интерферометри
 - 2.1.4. Лазерен интерферометър с фазов светоделител
 - 2.1.5. Лазерни интерферометри с фазова модулация
 - 2.1.6. Метод на виртуалната точка за измерване на напречно отместване на ъглов отражател
 - 2.1.7. Двупроходен интерферометър на Майкелсон с равнинни крайни огледала

СЕМИНАР №2

3. МНОГОЛЪЧЕВИ ИНТЕРФЕРОМЕТРИ

- 3.1. Теоретични бележки
- 3.2. Класически модел на многолъчев интерферометър
- 3.3. Финес на ивиците. Дефиниция
- 3.4. Обобщен модел на многолъчев интерферометър. Модел на Хернандез
- 3.5. Области на приложение на многолъчевите интерферометри
- 3.6. Особенности в конструкцията на многолъчевите интерферометри
- 3.7. Методи за регистрация на интерферометрична картина
- 3.8. Чувствителност на интерферометъра при измерване на малки разлики във фазата

3.9. Лазерен гравиметър с честотна стабилизация

СЕМИНАР №3

4. ДРУГИ ВИДОВЕ ИНТЕРФЕРОМЕТРИ

4.1. Интерферометри с дифракционна решетка (интерферометри на Рончи)

4.1.1. Шийринг интерферометри за изследване вълнови фронтове

4.1.2. Интерферометър на Рончи

4.1.3. Дифракционни интерферометри за изследване на малки премествания

4.1.4. Други схеми на дифракционни интерферометри

5. ОПТИЧНИ ЕЛЕМЕНТИ НА ИНТЕРФЕРОМЕТРИТЕ

5.1. Основни изисквания към оптичните елементи на интерферометрите

5.2. Точков източник

5.3. Ректификация на гаусов сноп

5.4. Влияние на точността на повърхностите и на настройката на крайните огледала в Майкелсоновия интерферометър

5.5. Оптически конструкции на колиматори

5.6. Отражатели и светоделители

6. ЛАЗЕРНА ТЕЛЕМЕТРИЯ

6.1 Фазови телеметри

6.2 Лазерни Доплерови анемометри. Измерване на скорости на частици

7. ДИФРАКЦИЯ НА СВЕТЛИНАТА.

ВЪЛНОВА АБЕРАЦИЯ, ПРИМАРНИ ГЕОМЕТРИЧНИ АБЕРАЦИИ. ОСНОВИ НА ЛАЗЕРНАТА ДИФРАКТОМЕТРИЯ

7.1 Теоретични основи

7.2. Класификация на дифракционните явления

7.3. Дифракция на Фраунхофер

7.4. Дифракция на светлината върху правоъгълен отвор

7.5. Дифракционна теория на оптичното изобразяване

7.6. Пространствено-честотни свойства на една оптичната система.

Оптическа предавателна функция OTF. Модулационно предавателна функция MTF. Фазова предавателна функция PTF.

7.7. Какъв е смисълът на MTF от оптическа гледна точка?

7.8. Вълнова аберация. Примарни геометрични аберации

7.9. Алгоритъм за изчисляване на коефициентите на аберация от 3-ти ред

8. ЕЛЕМЕНТАРНИ ОСНОВИ НА ХОЛОГРАФИЯТА

8.1. Запис и свойства на тънка холограма

8.2. Фурие холография

8.3. Безлещова Фурие холограма (G. Stroke - 1965)

8.4. Холографска интерферометрия

9. СПЕКЪЛ МЕТОД

- 9.1. Спекъл структура на образа на дифузен предмет
- 9.2. Образът на точка в случай на разфокусировка
- 9.3. Образ на два съседни монохроматични точкови източници
- 9.4. Образ на голям брой монохроматични точкови източници
- 9.5. Фурие спектър на система от хаотични, но еднакви точкови двойки
- 9.6. Спекъл структура при изменение на равнината на наблюдение
- 9.7. Корелация между спекъл структурите в реални случаи
- 9.8. Интерференция в дифузна светлина
- 9.9. Интерференция от два не еднакви дифузьора

Приложение 1: Теорема на Грийн. Модел на извеждане на скаларната теория на дифракция

Вместо предговор

Настоящите *Записки* са само набързо нахвърляни бележки върху материала от лекциите и имат за цел да помогнат на онези студенти, които не успяват да си водят собствени записки. По тази причина те са лишени от всякакви претенции за изчерпателност, чистота на езика и дълбочина на обяснението. Най-вероятно, с хода на времето, те ще бъдат преработвани и допълвани. И с чувство на благодарност ще приема всяка критика, препоръка или напомняне за направени грешки.

Хр. Стоянов

1. ЛАЗЕРНА ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ

1.1 Увод

Интерферометрията е важен дял от съвременната оптика, заемащ заслужено място в най-прецизните области на човешката дейност. Към тях се числят метрологията, биологията, химията, медицината, експерименталната физика, инженерното дело. От особено важно значение е нейното приложение в технологиите, свързани с микроелектрониката и самата оптика. Тя се базира на класическото явление интерференция на две или повече вълни и се прилага при измерването на различни физични величини. Измерването, само по себе си, е процес на трансформиране на една величина, за която все още нямаме надеждна скала, в друга физична величина, за които вече има изградена и утвърдена метрологична скала. Например интензитет на светлината, електрически ток, напрежение и др.

Постепенно, приблизително от втората половина на 19 век, та чак до наши дни, интерферометрията е придобила невероятно разпространение. Днес тя е основен метод в астрономията при измерване ъгловите диаметри на светещи небесни тела. За спектроскопистите тя означава сравнително по-нов метод, който предлага много висока разделителна способност. В оптиката, тя е основен метод за контрол на качеството както на отделни повърхности, така и на цели изделия. В биологията микроинтерферометрите са дял от светлинната микроскопия и служат за изследване на отделни клетки, тъкани и микроорганизми. Подобна техника се използва за контрол на микротопографията на повърхности и намира широко приложение в материалознанието и микроелектрониката. За метролозите и инженерите интерферометрията е основно средство, позволяващо преобразуването на международният стандарт за дължина в реални, физични скали, годни за вграждане в различни инструменти или технологични процеси.

В тази глава ще разгледаме теорията на двулъчевите и многолъчевите интерферометри, а след това ще се спрем на някои техни приложения в оптичното уредостроене и метрологията. Понастоящем интерферометрията е важен метод и в експерименталната физика, с приложения в много клонове на науката. В края на този увод е уместно да си припомним, че явлението интерференция на светлината е упражнило значително влияние върху развитието на физиката. Например наблюденията на Юнг поставят основата на вълновата теория (на Жак Френел) за светлината, а също така и основата на съвременната теория за кохерентността. Специалната теория за относителността бе развита за да обясни отрицателният резултат от опита на Майкелсон и Морли.

В следната таблица е направен опит за обобщение на полето на приложение на интерферометрията.

Области на приложение на интерферометрията

Пряко измервана величина	Производна величина	Приложения
I. Разпределение на интензитета на интерференционните ивици по полето на работната апертура на интерферометъра	а) средната фазова разлика между интерфериращите вълни за цялото поле на работната апертура	1. Стандарт за дължина и дължина на вълна 2. Сравняване на дължини и контрол на машини 3. Рефрактометрия 4. Скорост на светл.
	б) вариации на фазовата разлика по полето на апертурата	1. Интерференчна микроскопия 2. Микротомография 3. Оптическо тестване
II. Контраст на ивиците	а) спектър на източника	1. Профили на симетрични спектрални линии
	б) пространствено разпределение на интензитета на източника	1. Диаметри на звезди
III. Цялостното разпределение на интензитета на ивиците (топография на интензитета и контраст) по работната апертура на интерферометъра	а) спектър на източника	1. Директна интерференчна спектроскопия 2. Фурие спектроскопия
	б) пространственото разпределение на лъчението от източника	1. OTF 2. Радиоастрономия 3. Холография

1.2. Класификация на интерферометрите

Преди да преминем към теорията е полезно въвеждането на определена система за класификация на интерферометрите. Това се налага от простата необходимост от бърза и точна ориентация в съществуващото понастоящем огромно количество от патенти и конструкции на такива уреди, един от друг по-хитроумен и съвършен. Но в почти всички са залегнали едни и същи основни идеи.

Има два традиционни методи за класификация на интерферометрите:

- а) според броя на интерфериращите снопове;
- б) според метода, използван за получаването на тези снопове.

Напоследък се препоръчва въвеждането на и на трети признак - според порядъка на корелация, за да бъдат включени и лазерните корелационни интерферометри.

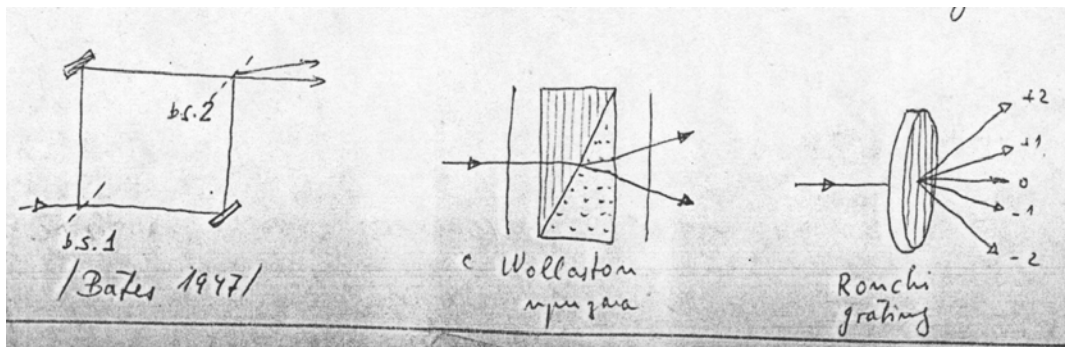
А. Според броя на интерфериращите снопове, интерферометрите делим на **двулъчеви** и на **многолъчеви**.

Три- или четири-лъчевите интерферометри (както ще ги срещнем в литературата) са варианти на двулъчевите.

Б. Според метода, използван за получаването на интерфериращите снопове, различаваме уреди с **делене на вълновият фронт** и с **делене на амплитудата**. Вторият метод преобладава и за това според типа на светоделителя интерферометрите се подразделят още на:

- интерферометри с полупрозрачно огледало. То може да бъде метално или диелектрично. Понякога тези тънки покрития влияят върху поляризацията на полетата.
- интерферометри с поляризационни светоделители (призма на *Rochon, Tompson, Wollaston* и др). Използваният двойнолъчепречупващ материал (напр. калцит), не само разделя и поляризира, но внася и надлъжна разлика в оптичните пътища. Тогава говорим също така за поляризационни интерферометри.
- интерферометри с дифракционен светоделител. Последният може да бъде със случайна или периодична структура.

Допълнение: Всеки интерферометър може да бъде технически реализиран по различен начин. Например, един интерферометър с напречен шийринг, според вида на използвания светоделител, може да бъде срещнат в следните конструкции:



От оптическа гледна точка тези уреди са идентични. Всеки от изображените по-горе интерферометри осъществява разделяне на входящия вълнов фронт на две равни по амплитуда части, въвежда между нормалите им малък ъгъл (подходящо избран според целта), след което те интерферират помежду си.

1.3. Аналитичен сигнал към реално поле

В началото нека си припомним някои основни понятия от вълновата оптика, които ще ни бъдат необходими по-нататък.

Обобщена реална хармонична вълна наричаме решението на вълновото уравнение във вида:

$$V(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos[\omega t - \delta(\mathbf{r})] \quad /1/$$

където с \mathbf{r} е означен радиус вектора на точката на наблюдение, а $a(\mathbf{r}) > 0$ и $\delta(\mathbf{r})$ са реални функции. Повърхнините с уравнение $\delta(\mathbf{r}) = \text{const.}$ се наричат вълнови повърхнини (или фазов вълнов фронт), за разлика от повърхнините с

константна амплитуда $a(\mathbf{r}) = \text{const}$. Вълни, при които двете повърхнини не съвпадат се наричат *нехомогенни*.

При редица изчисления във вълновата оптика се оказва по-удобно заместването на реалното поле /1/ с т. н. *аналитичен сигнал*. Това е комплексна функция от реални променливи, аналитична в горната или долната половина на комплексната равнина, и чийто Фурие спектър е идентично равен на нула при отрицателни честоти.

Забележка:

В математиката една функция се нарича *каузална*, когато тя е идентично равна на нула за отрицателни стойности на аргумента

$$f(x) = 0, \quad x < 0.$$

Също така е известно, че реалната и имагинерната част на Фурие спектъра на една каузална функция са свързани с Хилбертовата интегрална трансформация. Нека *докажем това важно за оптиката твърдение*.

Както е известно, всяка функция $f(x)$ може да бъде представена като сума от две функции, едната нечетна $o(x)$, а втората четна $e(x)$:

$$f(x) = e(x) + o(x) \quad /a.1/$$

Конструкцията на тези две функции, $e(x)$ и $o(x)$, е тривиална и се дава с изразите

$$e(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] \quad o(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)] \quad /a.2/$$

Нека Фурие образът на $f(x)$ да бъде функцията $F(s)$, която има вида:

$$F(s) = \text{Re}[F(s)] + i \text{Im}[F(s)] = R(s) + iX(s)$$

Едно непосредствено заместване с /a.1/ в интеграла на Фурие би ни убедило във валидността на следното твърдение

$$\begin{aligned} e(x) &\xrightarrow{F.T.} R(s) \\ o(x) &\xrightarrow{F.T.} iX(s) \end{aligned} \quad /a.3/$$

От друга страна, ако функцията $f(x)$ е каузална, което по дефиниция означава $f(x) = 0, \quad x < 0,$

то очевидно

$$f(-x) = 0, \quad x > 0.$$

Тогава, с оглед на дефинициите /a.2/, при една каузална функция ще важи, че $f(x) = 2e(x) = 2o(x), \quad \text{при } x > 0.$

Това пък води до следните интересни зависимости

$$\begin{aligned} e(x) &= o(x) \quad \text{при } x > 0, \\ e(x) &= -o(x) \quad \text{при } x < 0 \end{aligned} \quad /a.4/$$

Зависимостите /a.4/ и /a.3/ могат да бъдат обединени в следната полезна форма

$$\begin{aligned} o(x) &= e(x) \text{sgn}(x) \xrightarrow{F.T.} iX(s) \\ e(x) &= o(x) \text{sgn}(x) \xrightarrow{F.T.} R(s) \end{aligned} ,$$

а от своя страна

$$\text{sgn}(x) \xrightarrow{F.T.} \frac{1}{i\pi s}.$$

Следователно, прилагайки теоремата за конволюцията, имагинерната част на спектъра е равна на

$$iX(s) = R(s) * \frac{1}{i\pi s}$$

или

$$X(s) = -\frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(s')}{s-s'} ds'$$

аналогично за реалната част на Фурие спектъра на каузалната функция

$$R(s) = \frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(s')}{s-s'} ds'$$

Реалната и имагинерната част на Фурие спектъра на една каузална функция са свързани с Хилбертовата интегрална трансформация.

Тази, на пръв поглед тромава дефиниция, ни доближава максимално до физичната представа за процесите – един процес в природата се развива в резултат на някаква причина, също така не трае вечно, тъй като енергията на източниците е крайна величина.

От английски език: causal = причинност, причинна връзка.

Забележете, в нашият случай каузалната функция е спектъра на едно поле!

Въвеждането на аналитичния сигнал внася удобство при работа с полета в областта на линейната оптика – вместо с амплитуди от вида $1/1/$ ще работим с тяхната комплексна репрезентация във вида $a(\mathbf{r})\exp[i(\omega t - \delta(\mathbf{r}))]$. Аналитичният сигнал е въведен в оптиката от Денис Габор през 1946 г. и се дефинира като:

$$V(\mathbf{r}, t) = V^r(\mathbf{r}, t) + iV^i(\mathbf{r}, t) \quad /2/$$

където функцията $V^i(\mathbf{r}, t)$ се дефинира към реалното поле чрез

$$V^i(\mathbf{r}, t) = \text{Hi}[V^r(\mathbf{r}, t)] \quad /3/$$

където със символът $\text{Hi}[\]$ е означено Хилбертовото интегрално преобразуване.

Допълнение:

Хилбертовото интегрално преобразуване на реалното поле се дефинира като

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{X-x} dx$$

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(x)}{X-x} dx .$$

където $V.P.$ означава главната стойност на интеграла в смисъла на Коши.

Хилбертовата трансформация може да се изрази и с помощта на операцията конволюция:

$$\hat{f}(x) = -f(x) * \frac{1}{\pi x}$$

$$f(x) = \hat{\hat{f}}(x) * \frac{1}{\pi x},$$

където конволюцията на две реални функции $f(x)$ и $g(x)$ се дефинира като

$$h(x) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du.$$

Навсякъде в текста тази операция ще означаваме със $*$, за разлика от оператора корелация, който ще означаваме с \otimes .

Тъй като $\text{Hi}[\cos(t)] = -\sin(t)$, то аналитичният сигнал към $\cos(t)$ е

$$V = \cos(t) - i.\sin(t) = \exp(-it).$$

За това, на едно обобщено хармонично реално поле от вида /1/ съответства аналитичен сигнал във вида:

$$V(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \exp\{-i[\omega t - \delta(\vec{r})]\} \quad /4/$$

Функцията

$$u(\vec{r}) = a(\vec{r}).\exp[i\delta(\vec{r})] \quad /5/$$

се нарича комплексна амплитуда на полето. Обикновено, аналитичният сигнал записваме във вида:

$$V(\vec{r}, t) = u(\vec{r}).\exp(-i\omega t) \quad /6/$$

Когато се налага извършването на линейни операции върху полетата, то тогава е по-удобно да се използват аналитичните им сигнали вместо самите реални полета /1/. Накрая, реалното резултантно поле е просто реалната част на резултантния аналитичен сигнал.

1.3.1 Някои свойства на аналитичният сигнал

С реалното поле $V^r(t)$ в действителност е означена една от декартовите компонентите на полето. Неговият комплексният Фурие спектър е:

$$v(v) = \int_{-\infty}^{\infty} V^r(t).\exp[i2\pi vt].dt,$$

и обратно

$$V^r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\nu) \exp[-i2\pi\nu t] d\nu$$

Забележка: В дефиницията и теорията на аналитичния сигнал по традиция се използва $+i$ Фурие преобразуванието, което, както знаем от математиката, при решаването на оптически задачи не води до математически противоречия.

Ще докажем, че Фурие спектъра на аналитичния сигнал към същото това реално поле е каузална функция и е равен на

$$V(\nu) = 2.H(\nu).v(\nu), \quad /7/$$

или, спектърът на аналитичния сигнал не съдържа отрицателни честоти, което е в съответствие с простата физична представа за естествените процеси.

Спектърът на реалното поле е комплексна функция от реалната променлива ν , която може да се представи във вида

$$v(\nu) = \text{Re}[v(\nu)] + i \text{Im}[v(\nu)],$$

а също така и във вида

$$v(\nu) = |v(\nu)| \exp[\arg v(\nu)] = \frac{1}{2} a(\nu) \exp[i\phi(\nu)],$$

където функциите $|v(\nu)|$, $\arg v(\nu)$, $a(\nu)$, $\phi(\nu)$ са реални функции от реална променлива. Тъй като $v(\nu)$ е спектър на реална функция, то

$$\begin{aligned} \text{Re}[v(\nu)] &= \text{Re}[v(-\nu)] \\ \text{Im}[v(\nu)] &= -\text{Im}[v(-\nu)] \end{aligned}$$

т.е. реалната част на спектъра е четна функция, а имагинерната му част е нечетна. Тогава

$$v(\nu) = \text{Re}[v(-\nu)] - i \text{Im}[v(-\nu)] = v^*(-\nu),$$

от където следва, че $a(\nu)$ е четна, а $\phi(\nu)$ е нечетна.

Тогава реалното поле добива вида

$$\begin{aligned} V^r(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(\nu)}{2} \exp[i(\phi(\nu) - 2\pi\nu t)] d\nu = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(\nu)}{2} \cos[\phi(\nu) - 2\pi\nu t] d\nu + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(\nu)}{2} \sin[\phi(\nu) - 2\pi\nu t] d\nu \end{aligned}$$

и, тъй като последният интеграл е равен на нула (подинтегралната функция е нечетна), то

$$V^r(t) = \int_0^{\infty} a(\nu) \cos[\phi(\nu) - 2\pi\nu t] d\nu .$$

Нека към това реално поле се дефинира помощната функция

$$V^i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(\nu)}{i} \nu(\nu) \exp[-i2\pi\nu t] d\nu ,$$

която е също реална. Аналогично на горния пример с реалното поле, ако заместим с полярната форма на спектъра и отчете неговите свойства, то

$$V^i(t) = \int_0^{\infty} a(\nu) \sin[\phi(\nu) - 2\pi\nu t] d\nu = Hi[V^r(t)] .$$

Сега, ако заместим с така получените изрази за $V^r(\mathbf{r}, t)$ и $V^i(\mathbf{r}, t)$ в аналитичния сигнал $V(\mathbf{r}, t) = V^r(\mathbf{r}, t) + iV^i(\mathbf{r}, t)$, ще получим следното

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{-\infty}^0 \nu(\nu) \exp[-i2\pi\nu t] d\nu + \int_0^{\infty} \nu(\nu) \exp[-i2\pi\nu t] d\nu + \\ &+ \int_{-\infty}^0 (-1)\nu(\nu) \exp[-i2\pi\nu t] d\nu + \int_0^{\infty} (+1)\nu(\nu) \exp[-i2\pi\nu t] d\nu = \quad /8/ \\ &= 2 \int_0^{\infty} \nu(\nu) \exp[-i2\pi\nu t] d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} 2H(\nu)\nu(\nu) \exp[-i2\pi\nu t] d\nu \end{aligned}$$

Следователно, комплексния Фурие спектър на аналитичния сигнал, дефиниран към реалното поле, е

$$V(\nu) = FT[V(t)] = 2H(\nu)\nu(\nu) .$$

Спектърът на аналитичния сигнал е каузална фуния.

Също така, от теоремата на Рейли от Фурие анализа, непосредствено следва, че реалното поле $V^r(\mathbf{r}, t)$, помощното “имагинерно” поле $V^i(\mathbf{r}, t)$ и аналитичният сигнал $V(\mathbf{r}, t)$ са равно мощни:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [V^r(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [V^i(t)]^2 dt = 2 \int_0^{\infty} |V(\nu)|^2 d\nu$$

В оптиката сме в състояние да измерваме интензитета на полето, а не неговата комплексна амплитуда. Както е известно, интензитетът на полето I е дефиниран като:

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle = \langle |\mathbf{H}|^2 \rangle$$

където \mathbf{S} е векторът на Пойнтинг, \mathbf{E} и \mathbf{H} са съответно интензитетите електричното и магнитното поле, а с $\langle \rangle$ е означено усредняване върху достатъчно дълъг за едно наблюдение период от време. И, ако с $V(t)$ отново означим която и да е скаларна компонента на електромагнитното поле, то интензитетът на тази компонента ще бъде:

$$I = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [V(t) \cdot V^*(t)] dt \quad /9/$$

Тъй като за функцията $V^r(t)$ не може да се очаква, че е абсолютно, а от там, и квадратично интегруема, то тя не е стандартен Фурие предмет. Това налага по-прецизна дефиниция от математическа гледна точка както на аналитичният сигнал чрез Фурие спектъра на реалното поле, така и на определението за интензитета.

За тази цел нека разгледаме реалното поле в ограничен период от време с дължина $2T$. Тогава

$$V_T^r(t) = V^r(t) \cdot \Pi(t/2T), \quad v_T(v) = FT[V_T^r(t)],$$

а интензитета на полето ще бъде

$$\begin{aligned} I &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [V_T^r(t)]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [V_T^i(t)]^2 dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [V_T(t) V_T^*(t)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [v_T(v) v_T^*(v)] dv \end{aligned} \quad /10/$$

Ако тези граници съществуват, то интензитетът на полето има крайна, измерима стойност и тя е

$$I = \langle [V^r(t)]^2 \rangle = \langle [V^i(t)]^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle V(t) V^*(t) \rangle .$$

И така, ако при изчисленията използваме по-удобния комплексен запис, то интензитета можем да определим от аналитичния сигнал към полето.

В оптиката се дефинира величината **спектър на мощността** на светлинните трептения (или понякога *спектрална плътност*), във вида

$$G(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [v_T(v)]^2 \quad /11/$$

Тогава, съгласно /10/ и /11/, интензитета на полето може да се представи като

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) d\nu = 2 \int_0^{\infty} G(\nu) d\nu ,$$

тъй като по дефиниция функцията $G(-\nu) = G(\nu)$. Спектъра на мощността е величина достъпна за измерване, например, чрез разлагане на светлината с дисперсионен елемент (призма, решетка или др.), тъй като $G(\nu) = \frac{dI(\nu)}{d\nu}$.

Аналитичният сигнал към поле, което е суперпозиция от две (или повече) полета е сумата от аналитичните сигнали към отделните полета. Доказателството е тривиално. Ако имаме две полета $V_1^r(t)$ и $V_2^r(t)$, то за реалното резултантно поле, след тяхното наслагване, важи

$$V^r(t) = V_1^r(t) + V_2^r(t) ,$$

а от тук също така и за неговия спектър

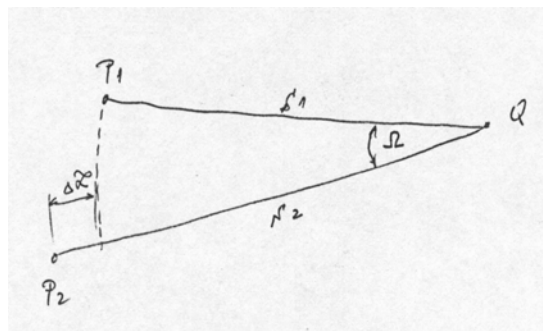
$$v(\nu) = v_1(\nu) + v_2(\nu) .$$

Тогава аналитичният сигнал към резултантното поле ще бъде /8/ :

$$V(t) = 2 \int_0^{\infty} v(\nu) \exp(-i2\pi\nu t) d\nu = V_1(t) + V_2(t) .$$

Или с други думи, **принципът за суперпозиция** важи както за реалните полета, така и за аналитичните сигнали, дефинирани към тях.

1.4. Обобщен закон за двулъчева интерференция



Фиг. 1

Нека разгледаме две вълни $V_1^r(t)$ и $V_2^r(t)$, генерирани от два точкови източника P_1 и P_2 (фиг. 1). Нека тези вълни интерферират в околността на т. Q , като изминават до нея пътища съответно s_1 и s_2 . Закъснението на едната вълна спрямо другата е

$$\tau = t_2 - t_1 = (s_2 / c) - (s_1 / c)$$

Ако към полетата в точките P_1 и P_2 дефинираме съответните аналитични сигнали $V_1(t)$ и $V_2(t)$, то резултантното поле в т. Q ще бъде:

$$V_Q(t) = K_1 V_1(t - t_1) + K_2 V_2(t - t_2) .$$

Константите на разпространение K_1 и K_2 зависят от разстоянията s_1 и s_2 , и от пространствено-излъчвателните характеристики на източниците P_1 и P_2 . Интензитетът на светлината в т. Q ще бъде (с точност до константа):

$$I = \langle V_Q(t) V_Q^*(t) \rangle = \langle |K_1 V_1(t - t_1) + K_2 V_2(t - t_2)|^2 \rangle .$$

Ако сменим променливата t и въведем закъснението τ , то тогава

$$\begin{aligned} I &= \langle [K_1 V_1(t + \tau) + K_2 V_2(t)] \cdot [K_1^* V_1^*(t + \tau) + K_2^* V_2^*(t)] \rangle . \\ I &= \langle [K_1 K_1^* V_1(t + \tau) V_1^*(t + \tau)] \rangle + \langle [K_2 K_2^* V_2(t) V_2^*(t)] \rangle + \\ &+ \langle [K_1 K_2^* V_1(t + \tau) V_2^*(t)] \rangle + \langle [K_1^* K_2 V_1^*(t + \tau) V_2(t)] \rangle \end{aligned}$$

За да бъде преработен горния израз ще използваме дефиницията за интер-корелационната функция, въведена в оптиката от Емил Волф през 1954 г.:

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle V_1(t + \tau) V_2^*(t) \rangle .$$

Това е комплексна функция на реалната променлива τ и следователно има вида

$$\Gamma_{12}(\tau) = \text{Re}[\Gamma_{12}(\tau)] + i \text{Im}[\Gamma_{12}(\tau)] = \Gamma_{12}^r(\tau) + i \Gamma_{12}^i(\tau)$$

Ако означим с

$$\begin{aligned} I_{1Q} &= K_1^2 \langle V_1(t) V_1^*(t) \rangle \\ I_{2Q} &= K_2^2 \langle V_2(t) V_2^*(t) \rangle \end{aligned}$$

интензитетът на полето в точка Q, създаден там само от източника в точка P_1 или само от този в точка P_2 , то резултантното поле в точка Q ще бъде

$$I_Q(\tau) = I_{1Q} + I_{2Q} + 2K_1 K_2 \Gamma_{12}^r(\tau)$$

Нека сега въведем и функциите на собствена кохерентност $\Gamma_{11}(\tau)$ и $\Gamma_{22}(\tau)$ на полетата в източниците P_1 и P_2 , т.е. авто-корелационните функции:

$$\Gamma_{11}(\tau) = \langle V_1(t+\tau)V_1^*(t) \rangle$$

$$\Gamma_{22}(\tau) = \langle V_2(t+\tau)V_2^*(t) \rangle$$

Интензитетите, които бихме измерили във всяка една от двете точки P_1 и P_2 , са съответно:

$$I_1 = \langle V_1(t)V_1^*(t) \rangle = \Gamma_{11}(0)$$

$$I_2 = \langle V_2(t)V_2^*(t) \rangle = \Gamma_{22}(0)$$

От така въведените величини и означения следва, че $I_{1Q} = K_1^2 \cdot I_1$ и $I_{2Q} = K_2^2 \cdot I_2$.

И накрая, ако въведем нормираната интер-корелационна функция на двете полета, която в оптиката се нарича **комплексна степен на кохерентност**

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}},$$

то законът за интерференция на две полета придобива своя окончателен и най-общ вид:

$$I_Q(\mathbf{r}, \tau) = I_{1Q} + I_{2Q} + 2\sqrt{I_{1Q}I_{2Q}}\gamma_{12}^r(\mathbf{r}, \tau) \quad /12/$$

С този израз се описва **обобщения закон за двулъчева интерференция**. В него се напомня, че както комплексната степен на кохерентност

$$\gamma_{12}(\mathbf{r}, \tau) = \gamma_{12}^r(\mathbf{r}, \tau) + i\gamma_{12}^i(\mathbf{r}, \tau),$$

така и разпределението на интензитета на резултантното поле са функции както от закъснението между двете вълни τ , така и от пространствените координати на точката на наблюдение (които до този момент бяха пренебрегвани с цел простота на записа).

Функцията $\gamma_{12}^r(\tau)$ е величина достъпна за измерване, макар да има чисто статистически характер. Достатъчно е само да бъдат измерени интензитетите I_Q, I_{1Q}, I_{2Q} в зависимост от закъснението τ между двете интерфериращи вълни и да се замести в закона за интерференция. Това е важен извод, върху който се базира Фурие спектроскопията, която към момента се счита за един от най-мощните методи за спектрален анализ с висока разделителна способност.

Допълнение: В теорията на оптичката кохерентност се доказва, че функцията на Волф, а от там и нейната нормирана стойност $\gamma_{12}(\tau)$, е аналитичен сигнал. Следователно техните реални и имагинерни части са свързани с Хилбертовата интегрална трансформация. Ако бъде измерена реалната част $\gamma_{12}^r(\tau)$, то имагинерната може да бъде възстановена с изчисления. Но остава в сила и

следва да бъде отчетен и преодолян един фундаментален проблем. В реалния свят са на разположение само краен брой точки на измерване.

Ако пространството между източниците P_1 и P_2 , и точката на измерване Q е запълнено със слабо диспергираща, изотропна, но нехомогенна среда с разпределение на показателя на пречупване $n(\mathbf{r})$, то закъснението τ между двете вълни се изчислява от разликата в оптичните пътища. Тогава

$$\tau = [s_2 - s_1] / c = \frac{1}{c} \left[\int_{P_2Q} n(\mathbf{r}) dl - \int_{P_1Q} n(\mathbf{r}) dl \right] = \Delta L / c$$

В такава среда траекториите на лъчите $\widehat{P_1Q}$, $\widehat{P_2Q}$ са закривени и геометричните пътища L_1, L_2 пресмятаме с помощта на криволинейни интеграли.

Модулът на комплексната степен на кохерентност $|\gamma_{12}(\tau)|$ се нарича **степен на взаимна кохерентност**. От неравенството на Буняковски-Шварц следва нейното основно и много важно свойство:

$$0 \leq |\gamma_{12}(\tau)| \leq 1$$

/13/

1.5. Степен на кохерентност в някои частни случаи

Ще разгледаме общо четири случая, за които обикновено твърдим, че са най-близки до техническата практика.

1.5.1. Пълна взаимна некохерентност на две полета

Това е случаят, при който се наслагват полета от два напълно независими източника. Като пример най-често се посочват два атома от термичен източник. Според класическите представи за излъчването, полетата генерирани от двата атома са напълно независими едно от друго и вероятността за наличие на положителни и отрицателни амплитуди е еднаква. За това Волфовата функция се равнява практически на нула, както и комплексната степен на кохерентност, а също и нейната реална част, участваща в закона за интерференция. В този случай, интерференционно явление от класически тип не се наблюдава за никоя стойност на закъснението между двете полета и резултантното поле се подчинява на фотометричния закон

$$I_Q = I_1 + I_2$$

/14/

В този случай говорим за пълна взаимна некохерентност на двете полета.

1.5.2. Пълна взаимна кохерентност на две полета

Това е случаят на наслагане на две на две строго монохроматични вълни с еднаква честота. Например, подобна (но не идентична) ситуация се наблюдава,

ако осветим със сноп от He-Ne лазер две близко разположени точкови бленди. Така получените точкови източници P_1 и P_2 излъчват идентични вълни, чието изменение във времето се описва с аналитичния сигнал

$$V(t) = V_1(t) = V_2(t) = u \exp(-i2\pi\nu t),$$

където $u = \text{const}$. В този частен случай функцията на Волф може да бъде непосредствено определена

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(\tau) &= \langle V_1(t+\tau) V_2^*(t) \rangle = \langle u \exp[-i2\pi\nu(t+\tau)] u^* \exp[i2\pi\nu t] \rangle = \\ &= |u|^2 \exp(-i2\pi\nu\tau) \end{aligned}$$

а комплексната степен на кохерентност е

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\Gamma_{11}(0)} = \exp(-i2\pi\nu\tau).$$

Законът за двулъчева интерференция приема вида

$$I_Q(\tau) = I_{1Q} + I_{2Q} + 2\sqrt{I_{1Q}I_{2Q}} \cos(2\pi\nu\tau). \quad /15/$$

Интерференционното явление се наблюдава за всяка стойност на закъснението τ . В този случай говорим за пълна взаимна кохерентност на двете полета.

Ако светлината се разпространява в хомогенна изотропна среда с показател на пречупване N , то закъснението между двете интерфериращи вълни може да се изрази чрез разликата на изминатите от тях пътища ΔL . Тогава

$$\cos(2\pi\nu\tau) = \cos\left(2\pi\nu \frac{N \cdot \Delta L}{c}\right) = \cos(k \cdot \Delta L), \quad /16/$$

където $k = 2\pi/\lambda$ е вълновото число, а

λ е дължината на вълната в средата.

Важна характеристика на интерференционното явление е въведеното от Алберт Майкелсон понятие **видимост** (или **контраст**) на интерференционните ивици.

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad /17/$$

За разглеждания случай

$$V = \frac{2\sqrt{I_{1Q}I_{2Q}}}{I_{1Q} + I_{2Q}}.$$

Ако двата интензитета са равни, то контраста на ивиците е равен на 1.

1.5.3. Два точкови квазимонохроматични източника

Нека разгледаме наслагването на вълни от два идентични, квазимонохроматични точкови източници P_1 и P_2 . На практика такива източници получаваме чрез изобразяването на един квазимонохроматичен източник с подходяща оптична система (например с бипризмата на Френел, двойното огледало на Френел, огледалото на Лойд, интерферометър на Майкелсон и много други). Двете интерфериращи вълни ще имат еднаква форма на трептенията

$$V_1(t) = V_2(t) = V(t).$$

Аналитичният сигнал към квазимонохроматичното поле е

$$V(t) = u(t) \exp(-i2\pi\bar{\nu}t) = a(t) \exp[i\delta(t)] \exp(-i2\pi\bar{\nu}t).$$

От дефиницията на квазимонохроматичния сигнал следва, че $a(t), \delta(t)$ са много бавно изменящи се функции във времето, в сравнение с $\cos(2\pi\bar{\nu}t)$. Комплексната степен на взаимна кохерентност е

$$\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{11}(\tau) = \gamma_{22}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\Gamma_{11}(0)} = \frac{\langle u(t+\tau)u^*(t) \rangle}{\langle |u(t)|^2 \rangle} \exp(-i2\pi\bar{\nu}\tau), \quad /18/$$

където числителят в действителност представлява авто-корелационната функция на комплексната амплитуда на квазимонохроматичното поле. Тя също е бавно изменяща се функция от закъснението τ . Горният израз може да бъде представен във вида

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| \exp[i\alpha_{12}(\tau)] \exp(-i2\pi\bar{\nu}\tau),$$

където отново $|\gamma_{12}(\tau)|$ и $\alpha_{12}(\tau)$ са бавно изменящи се функции от закъснението τ .

Законът за интерференция на двете полета придобива вида

$$I_Q(\tau) = I_{1Q} + I_{2Q} + 2\sqrt{I_{1Q}I_{2Q}} |\gamma_{12}(\tau)| \cos[\alpha_{12}(\tau) - i2\pi\bar{\nu}\tau]. \quad /19/$$

Контрастът на ивиците е

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_{1Q}I_{2Q}}}{(I_{1Q} + I_{2Q})} |\gamma_{12}(\tau)|.$$

При изравнени интензитети на двете полета, контраста е $V = |\gamma_{12}(\tau)|$. При $\tau = 0$ контраста е равен на 1. Това обяснява факта, защо и при бяла светлина се наблюдава интерференция (виж числителя в /18/). При нарастване на закъснението τ , видимостта V обикновено намалява до нула. Спадането не е задължително монотонно. То зависи от формата на спектъра на мощността на източника.

В даденият случай говорим за частична кохерентност на вълните. Влиянието на $\alpha_{12}(\tau)$ се изразява в отместване на ивиците спрямо положението им, което бихме измерили със строго монохроматичен източник с честота $\bar{\nu}$.

В разгледаният случай комплексната степен на взаимна кохерентност $\gamma_{12}(\tau)$ е идентична с нормираната автокорелационна функция на аналитичен сигнал $V(t)$, съответстващ на квазимонохроматичното поле.

Теорема на Винер-Хинчин: Фурие спектъра на една автокорелационна функция се равнява на неговият мощностен спектър.

От теоремата на Винер-Хинчин следва за нормираната автокорелационна функция

$$FT\{\gamma(\tau)\} = W_n(\nu) = \frac{|F(\nu)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu},$$

където $F(\nu)$ е Фурие спектъра на аналитичния сигнал към реалното квазимонохроматично поле. Мощностният спектър на аналитичния сигнал $V(t)$ е $|2H(\nu)\tilde{V}^r(\nu)|^2$, където $\tilde{V}^r(\nu) = FT\{V^r(t)\}$ е Фурие спектъра на реалното квазимонохроматично поле, а $H(\nu)$ е функцията на Хевисайд. От обратното Фурие преобразование получаваме

$$\gamma(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |2H(\nu)\tilde{V}^r(\nu)|^2 \exp(-i2\pi\nu\tau) d\nu}{\int_{-\infty}^{\infty} |2H(\nu)\tilde{V}^r(\nu)|^2 d\nu} = \frac{\int_0^{\infty} G(\nu) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\nu}{\int_0^{\infty} G(\nu) d\nu}.$$

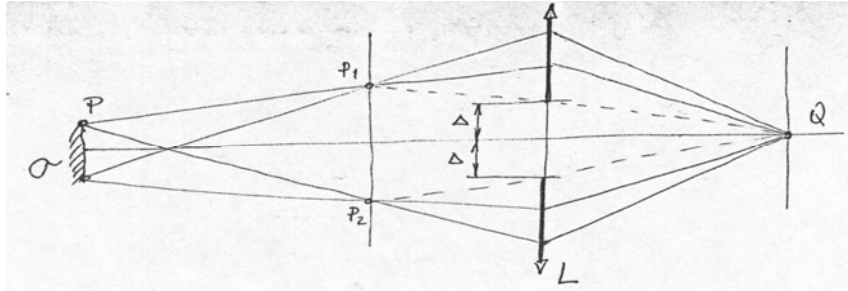
Тази релация ни дава възможност, ако знаем спектъра на мощността на едно поле, да изчислим неговата комплексната степен на кохерентност $\gamma(\tau)$. И обратно, от известна функция $\gamma(\tau)$ да се определи мощностният спектър на източника. Този факт е използван от *Арманд Физо* (1862) и от *Алберт Майкелсон* (1891) за изследване на фината структура на спектри, като по този начин се поставят основите на Фурие спектроскопията.

1.5.4. Площен квазимонохроматичен, пространствено некохерентен източник

На практика никога не разполагаме с точков източник тъй като той е нереализуем. Дори и да съществуваше такъв, неговата мощност би клоняла към

нула. Реалните източници са обемни. Понятието площен източник е по-скоро една идеализация, под която се разбира една от граничните повърхности на някакъв реален, обемния източник.

Ще разгледаме равнината σ , съставена от огромен брой точкови квазимонохроматични източници с една и съща средна честота $\bar{\nu}$ и напълно взаимно некохерентни. Тази идея се онагледява добре чрез експеримента с двойната леща на Бийе (1862).



Фиг. 2

В околността на точка Q се наслагват вълните, генерирани от източниците в точките P_1 и P_2 , които от своя страна са образите на т. Q с всяка половина на лещата. Ако двете половини на лещата е симетрично отместени, на разстояние Δ от оптичната ос, то оптичните пътища $[P_1Q]$ и $[P_2Q]$, изминати от всяка от двете вълни, са равни. Следователно, интерференционното явление в околността на точка Q ще зависи основно от Волфовата функция $\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma_{12}(P_1, P_2, \tau)$, както и от комплексната степен на взаимна кохерентност $\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{12}(P_1, P_2, \tau)$ на светлинните трептения в точките P_1 и P_2 на оптичното поле, създадено от площния квазимонохроматичен източник σ , и то по-специално, от стойността $\gamma_{12}(0)$, тъй като в точка Q закъснението между двете интерфериращи вълни е равно на нула, $\tau = 0$. Този случай е често срещан в техническата практиката. По тази причина за стойността

$$\gamma_{12}(\tau) \Big|_{\tau \rightarrow 0} = \gamma_{12}(P_1, P_2, \tau) \Big|_{\tau \rightarrow 0} = \gamma_{12}(P_1, P_2, 0) = \gamma_{12}(0) = \mu_{12},$$

която има основно значение при формирането на интерференционното поле, е отреден отделен термин – тя се нарича **комплексен коефициент на пространствена кохерентност**.

По аналогия на предишния случай, който в действителност е частен на този (до предишният случай ще стигнем, ако оставим в граничен преход източника σ да дегенерира в точка), можем комплексната степен на взаимна кохерентност да запишем във вида

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| \cdot \exp[i\alpha_{12}(\tau)] \exp(-i2\pi\bar{\nu}\tau)$$

където отново $|\gamma_{12}(\tau)|$ и $\alpha_{12}(\tau)$ са бавноизменящи се функции от τ .

Но в този случай $\gamma_{12}(0) \neq 1$!

Причината това да бъде така се корени във факта, че полетата в точките P_1 и P_2 са суперпозиция от всички елементарни полета, излъчени от множеството точки P , лежащи по повърхността на източника σ . А когато точката P от източника σ обхожда неговата повърхност, разликата в оптичните пътища

$$[\Delta L] = [\overline{PP_2Q}] - [\overline{PP_1Q}]$$

се изменя с положението на точка P по σ . На практика се допуска тази разлика да бъде $[\Delta L]_{\max} = \lambda / 4$ (това условие се нарича условие на Рейли за размера на източника на двулъчев интерферометър). За множеството точки Q от полето на интерференция, за които закъснението τ е много по-малко от времето на кохерентност Δt на всеки от точковите квазимонохроматични източници по σ (по условие се предполага, че те са идентични, макар и взаимно некохерентни), можем да пишем, $\beta_{12} = \alpha_{12}(0)$,

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(\tau) &\doteq \gamma_{12}(0) \exp(-i2\pi\bar{\nu}\tau) = \mu_{12} \exp(-i2\pi\bar{\nu}\tau) = \\ &= |\mu_{12}| \exp(i\beta_{12}) \exp(-i2\pi\bar{\nu}\tau) \end{aligned}$$

и интерференционния закон придобива вида

$$I_Q = I_{1Q} + I_{2Q} + 2\sqrt{I_{1Q}}\sqrt{I_{2Q}}|\mu_{12}|\cos(\beta_{12} - 2\pi\bar{\nu}\tau).$$

Комплексният коефициент на пространствена кохерентност по дефиниция е равен на

$$\mu_{12} = \frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{I_{12}}{\sqrt{I_1 I_2}},$$

където величината в числителя

$$I_{12} = \Gamma_{12}(0) = \langle V_1(t)V_2^*(t) \rangle$$

се нарича взаимен интензитет.

Комплексната степен на простространствена кохерентност се изчислява от теоремата на Ван Цитерт – Цернике, Фиг. 3,

$$\mu_{12} = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \int_{(\sigma)} L_e(\sigma) \frac{\exp[ik(r-s)]}{rs} d\sigma$$

където функцията

$$L_e(\sigma) = \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \sigma' \partial \Omega} \left[\frac{W}{m^2 \cdot Ster} \right]$$

е нормираната енергетична яркост на площния източник σ ,

$d\sigma = d\xi d\eta$ е елемент от площния източник,

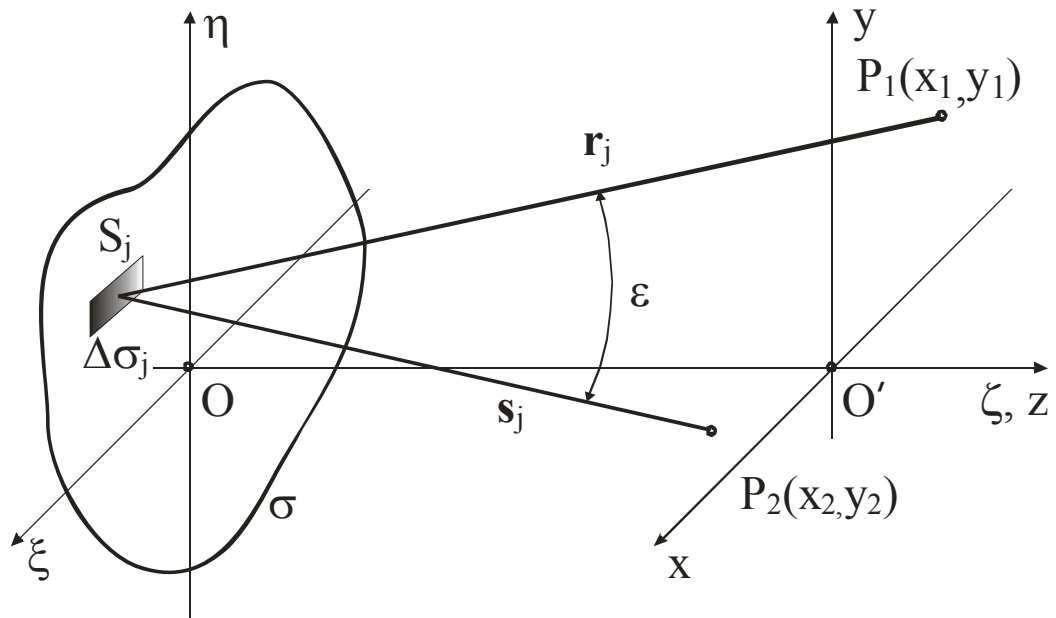
$d\sigma' = d\sigma \cos \theta$ е неговата нормална проекция в посока на излъчването,

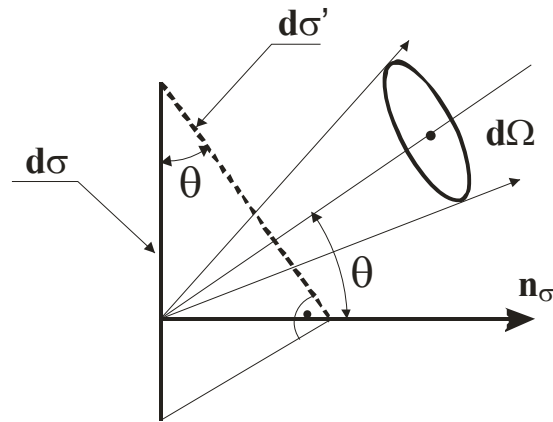
$d\Omega$ е елемент от пространствения ъгъл, в който се излъчва,

r, s са дължините на радиус векторите на точките P_1, P_2 , кохерентността между които е предмет на изследване,

$\bar{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$ е средното вълново число на полето.

Тази теорема се прилага в практиката за изчисляване на допустимият размер на източника в един интерферометър. Обикновено се допуска спадане на контраста до ниво 0,9. В този интервал (1,0.9) говорим за оптимален размер на източника, при условие, че интензитетите на интерфериращите вълни е равни. Ако контрастът спадне до нула, т.е. $\mu_{12} = 0$, казваме, че източникът е достигнал своя критичен размер. Тогава в изходната зеница на интерферометъра не се наблюдават никакви ивици.





Фиг. 3

1.6. Форма на интерференционните ивици и разстояние между тях

Класически пример за двулъчева интерференция е наслагането на сферични вълни, генерирани от два точкови източника P_1 и P_2 . Ивиците, които наблюдаваме върху плосък екран са сеченията на семейство двуплощни, ротационни хиперboloиди, с фокуси в точките P_1 и P_2 , с равнината на екрана.

На много голямо разстояние от правата k , носеща точките P_1 и P_2 , върху екрана $s1$, и в околността на симетралната равнина на отсечката P_1P_2 и се наблюдава система прави, успоредни на тази равнина интерференчни ивици.

Върху екрана $s2$, перпендикулярен на правата k , наблюдаваме концентрични кръгови сечения, ивици на постоянен наклон (наричани още *ивици на Хайдингер*).

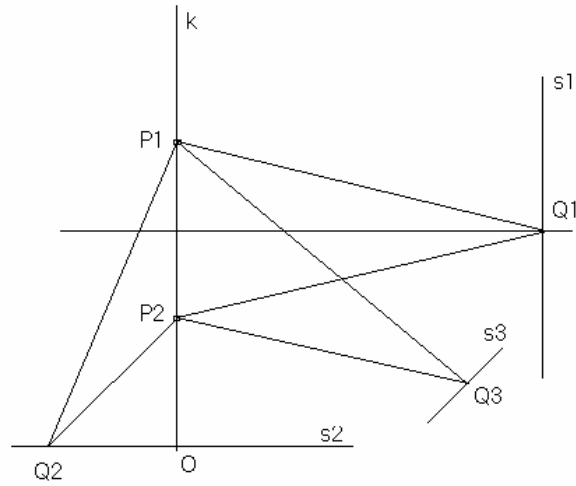
В общият случай, показан с екрана $s3$, се наблюдават сеченията на семейството двуплощни ротационни хиперboloиди, с фокуси в точките P_1 и P_2 , с равнината на екрана.

Тези хиперboloиди са геометричното място на ивици с константен порядък на интерференция. Например, условието за ивица с максимален интензитет е

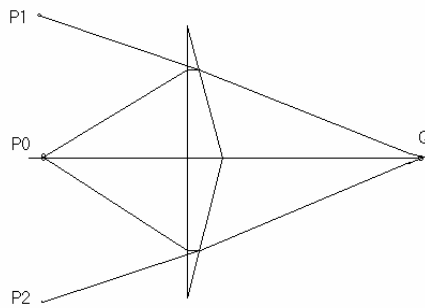
$$\Delta L = \overline{P_1Q} - \overline{P_2Q} = j\lambda, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

което изразено в декартови координати е уравнение на двуплощен ротационен хиперboloид, с фокуси в точките P_1 и P_2 .

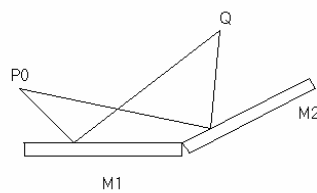
Условието за максимум на интензитета е изпълнено за безкраен брой стойности на параметъра j . Той се нарича **порядък на интерференция**.



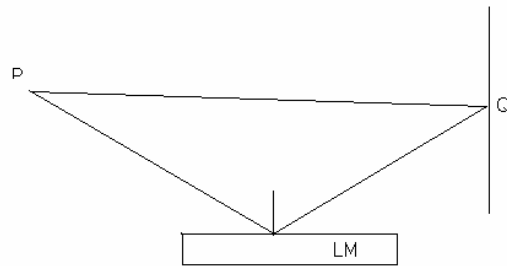
Прави, успоредни интерференчни ивици се наблюдават с помощта на
- Бипризма на Френел



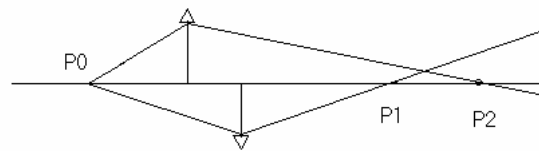
- Двойно огледало на Френел



- Огледалото на Лойд (Lloyd)



Концентрични интерференчни ивици се наблюдават също така и при опита с двойната леща на Меслин (Meslin - 1893 г.):



Всички видове ивици могат да бъдат наблюдавани при различни състояния на настройка на *Майкелсонов интерферометър*.

1.7. Векторен и матричен метод за пресмятане на огледални системи

Задача 1: Определяне на отразен от огледало лъч.

Ако единичните вектори \mathbf{r} , \mathbf{n} определят посоката на падащия лъч и нормалата към огледалото, то посоката на отразения лъч, определена от единичният вектор \mathbf{r}' е

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}.$$

От това уравнение се вижда, че са спазени физичните условия от закона за огледално отражение:

- \mathbf{r}' , \mathbf{r} , \mathbf{n} са компланарни;
- \mathbf{r}' и \mathbf{r} сключват еднакви ъгли с \mathbf{n} ($\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$).
-

Задача 2: Определяне на положението на огледален образ на точка

Положението на образа \mathbf{x}' на точка \mathbf{x} , създаден с огледало, минаващо през точка с радиус вектор \mathbf{a} и единична нормала \mathbf{n} , се описва с уравнението

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - 2[(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n}.$$

Същият резултат често пъти се записва в матрична форма (Brower, 1964)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x},$$

където

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix},$$

Ако в избраната координатна система Охуз огледалото минава през т. $\mathbf{a}(a, b, c)$ и нормалата към него е $\mathbf{n}(l, m, n)$, то:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1-2l^2 & -2lm & -2ln & 2ls \\ -2lm & 1-2m^2 & -2mn & 2ms \\ -2ln & -2mn & 1-2n^2 & 2ns \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

където е въведена за удобство помощната величина $s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = la + mb + nc$.

Особено важно за практиката е изследването на отместването на образа. Влиянието измененията в положението на огледалото или на предмета се описват от пълният диференциал

$$\delta \mathbf{x}' = \delta \mathbf{x} - 2(\delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} + 2(\delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} - 2[(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} - 2[(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}] \cdot \delta \mathbf{n}.$$

При отражение на лъч с единичен вектор $\mathbf{r}(l, m, n)$ в плоско огледало с нормала $\mathbf{n}(a, b, c)$ и минаващо през началото на координатната система, се получава лъч с единичен вектор $\mathbf{r}'(l', m', n')$. Това отражение се описва с матричното уравнение:

$$\begin{bmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}.$$

1.8. Влияние на поляризацията

До бе отбягван факта, че светлината е напречно вълново явление, и като такава, би могла да притежава известна поляризация.

Нека разгледаме плоска монохроматична вълна, разпространяваща се в посока на оста z . Тогава нейният електричен вектор ще бъде

$$\mathbf{E} = E_x \cdot \hat{\mathbf{x}} + E_y \cdot \hat{\mathbf{y}} .$$

Пренебрегвайки дифракцията, поляризацията на монохроматична вълна се описва с метода на Джонс (*Jones*). Комплексната амплитуда на всяка монохроматична вълна се описва еднозначно чрез вектора на Максвел-Джонс:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$$

Този вектор се намира към модул единица тъй като поляризационното състояние се определя единствено от разликата във фазите и от отношението на амплитудите на двете компоненти на вълната.

В областта на линейната оптика действието на всеки оптичен елемент или среда се описва с матрица 4×4 , характерна за всеки вид елемент.

Така например, планпаралелна пластинка, изработена от двойно лъчепречупващ материал, внасяща закъснение γ между двете ортогонални линейно поляризиращи компоненти $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y$. С други думи, тя действа като линеен закъснител (ретардер) на фазата и се описва (с точност до константен фазов фактор), с матричният оператор:

$$\mathbf{R}(\gamma) = \begin{bmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{bmatrix} .$$

Ако оптичната ос на ретардера сключва ъгъл ϕ с оста x , то ротацията на този ъгъл се изразява с матрицата:

$$\mathbf{S}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

(в оригиналните работи на Jones - 1941г. се използва обратен знак за ϕ).

Тогава поляризацията на изхода от ретардера е:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{S}(-\phi) \cdot \mathbf{R}(\gamma) \cdot \mathbf{S}(\phi) \cdot \mathbf{E} .$$

Един важен фазов елемент (ретардер) са отразителните повърхности на елементите, като например, светоделители, огледала, призми, работещи на пълно вътрешно отражение (ПВО) и др. При тях комплексните амплитудни коефициенти на отражение \bar{r}_{\parallel} и \bar{r}_{\perp} в общият случай са различни. Един отразител се описва с матрицата

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \bar{r}_{\parallel} & 0 \\ 0 & \bar{r}_{\perp} \end{bmatrix}.$$

Преминалия през оптичната система сноп има интензитет:

$$I = \langle \mathbf{E}_x \cdot \mathbf{E}_x^* + \mathbf{E}_y \cdot \mathbf{E}_y^* \rangle = \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^+ \rangle,$$

т.е. усредненото по време скалярно произведение на \mathbf{E} с неговия ермитово спрегнат вектор \mathbf{E}^+ . Освен това, ако \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 са два снопа с единична амплитуда, казваме, че *те се различават по поляризация на ъгъл σ* , където

$$\cos \sigma = \langle |\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^+| \rangle.$$

Например, когато $\cos \sigma = 0$, казваме, че двете вълни са **ортогонално поляризирани**. Отчитайки корелационната дефиниция за ъгъл на поляризация, обобщеният закон за интерференция на две вълни придобива по-пълният си вид

$$I_Q = I_{1Q} + I_{2Q} + 2(I_{1Q}I_{2Q})^{1/2} \operatorname{Re}[\gamma_{12}(\tau)] \cdot \cos \sigma$$

Поляризационното поведение на полето, разглеждано като средностатистически резултат от суперпозицията на огромен брой, най-често неподредени, елементарни полета (фотони), е тясно свързано с теорията за кохерентността.

За описание на кохерентните свойства на едни поле *Л. Мандел* и *Е. Волф* (1965) въвеждат матрицата на кохерентност.

Квазимонохроматичната светлина в общия случай не е изцяло поляризирана. Най-общо, ако полето е резултат от суперпозицията на две примарни полета, неговите кохерентни и поляризационни свойства могат да бъдат напълно описани матрицата

$$J_{12} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix}.$$

Тази матрица се нарича **матрица на кохерентност** и нейните елементи са четирите интеркорелации (или взаимни корелации) между x - и y -компонентите на две полета, излъчвани съответно от източници в точките P_1 и P_2 .

Елементите на матрицата на кохерентност се дефинират като

$$J_{xx} = \langle E_{x_1} E_{x_2}^* \rangle, \quad J_{xy} = \langle E_{x_1} E_{y_2}^* \rangle, \quad J_{yx} = \langle E_{y_1} E_{x_2}^* \rangle, \quad J_{yy} = \langle E_{y_1} E_{y_2}^* \rangle.$$

Нека промяната на поляризацията на едно поле под въздействието на дадена среда или оптична система (Фиг.1.8.1) се описва с една матрица на Джонс \mathbf{A} . Тогава изходящото поле ще бъде

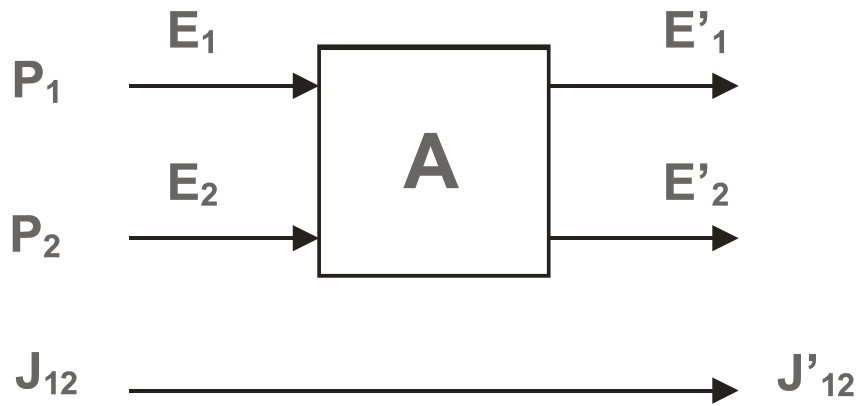
$$\mathbf{E}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$$



Фиг. 1.8.1

Ако имаме два независими източника P_1 и P_2 , излъчващи съответно вълните E_1 и E_2 , тогава трансформацията на матрицата на кохерентност в резултат на този процес се дава с израза, Фиг. 1.8.2,

$$J'_{12} = A_1 \cdot J_{12} \cdot A_2^+$$



Фиг. 1.8.2

Индексите към оператора A отразяват възможността, че той, когато е приложен поотделно към всяко едно от полетата, би могъл в общия случай да има различен вид: към първият сноп е A_1 , а към втория сноп A_2 .

Виждаме, че интензитета на един отделен светлинен сноп важи

$$Tr J_{11} = J_{xx} + J_{yy} = I,$$

т.е. следата на собствената матрица на кохерентност се равнява на интензитета на снопа. **Степента на поляризация** на полето (съгласно Емил Волф - 1964г.) се дефинира като:

$$P = \frac{I_{pol}}{I} = \left\{ 1 - \left[4 \det J_{11} / (Tr J_{11})^2 \right] \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}J_{yx}}{(J_{xx} + J_{yy})^2} \right\}^{1/2}.$$

В заключение на тези кратки бележки следва да бъде разгледан и случая на собствена корелация на един сноп светлина, т.е. собствената матрица на кохерентност на едно поле. Тя в този случай има вида

$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix}.$$

С елементите на собствената матрица на кохерентност са непосредствено свързани *параметрите на Стокс* на светлината. Те се дефинират като

$$S_0 = J_{xx} + J_{yy}$$

$$S_1 = J_{xx} - J_{yy}$$

$$S_2 = J_{xy} + J_{yx}$$

$$S_3 = -i(J_{xy} - J_{yx})$$

Тези четири реални числа образуват вектора на Стокс $\mathbf{S} = [S_0, S_1, S_2, S_3]$ и имат фундаментално значение при описанието на поляризационното състояние на едно поле. Параметрите на Стокс обединяват статистическата природа на светлината с усреднения, наблюдаем ефект от светлината. Те имат размерността на интензитет.

СЕМИНАР №1

Преглед на някои прости математически означения

1. Π - функция (нарича се още *прозоречна, правоъгълна*)

Най-често срещаните в литературата означения за тази функция са $\Pi(x)$ и $\text{rect}(x)$. С оглед теоремата на Дирихле, тази функция се дефинира така

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{при } |x| = \frac{1}{2} \\ 1, & \text{при } |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

2. Триъгълна функция:

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| > 1 \\ 1 - |x|, & \text{при } |x| < 1 \end{cases}$$

3. Функция на Хевисайд (*Heaviside*):

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{при } x = 0 \\ 1, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

4. Знакова функция:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x < 0 \\ 0, & \text{при } x = 0 \\ 1, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

5. Филтрираща функция $\text{sinc}(x)$:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

Функцията $\text{sinc}(x)$ е Фурие образ на прозоречната функция:

$$FT\{\Pi(x)\} = \text{sinc}(v)$$

$$\text{Други свойства: } FT[\text{sinc}(x)] = \Pi(s),$$

$$FT[\text{sinc}^2(x)] = \Lambda(s).$$

6. Импулсен символ на *Dirac*:

$$\delta(x) = 0, \text{ при } x \neq 0$$

$$\delta(x) = \infty, \text{ при } x = 0$$

$$FT\{\delta(x)\} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x}{T}\right) dx$$

Важно свойство:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

7. Четна и нечетна импулсна двойка

$$\text{четна: } \parallel(x) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(x + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$\text{нечетна: } \perp(x) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(x + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$F[\parallel(x)] = \cos(\pi s) \quad F[\cos \pi x] = \parallel(s)$$

$$F[\perp(x)] = -i \sin(\pi s) \quad F[\sin \pi x] = i \perp(s)$$

8. Гребеновидна функция на Дирак и някои нейни свойства:

$$\text{Ш}(x) = \text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

$$\text{Ш}(ax) = \frac{1}{|a|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - \frac{n}{a}\right)$$

$$\text{Ш}(x) = \text{Ш}(-x)$$

Репликационно свойство:

$$\text{Ш}(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(u-n) f(x-u) du = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-n)$$

Филтриращо свойство:

$$\text{Ш}(x) f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \delta(x-n)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Ш}(x) f(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$$

$$\text{Ш}(x) \xrightarrow{F.T.} \text{Ш}(s)$$

Ханкелова интегрална трансформация (или Фурие-Беселова):

Ако реалната функция $f(x, y)$ притежава осева симетрия (напр. оптична апертура с централна симетрия), то можем да извършим субституцията:

$$f(x, y) = f(r)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

Тогава:

$$\begin{aligned} FT\{f(x, y)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy = \left| \begin{array}{l} u = g \cos \varphi \\ v = g \sin \varphi \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r) e^{-i2\pi gr(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi)} r dr d\theta \end{aligned}$$

$$F(u, v) = \int_0^{\infty} f(r) \left[\int_0^{2\pi} e^{-i2\pi gr \cos(\theta-\varphi)} d\theta \right] r dr$$

Една от дефиниционните форми на функцията на *Bessel* от първи род и n -ти ред е

$$J_n(z) = \frac{i^{(-n)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inz \cos(\theta)} \cdot e^{in\theta} \cdot d\theta \ .$$

Тогава

$$F(u, v) = F(g) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) \cdot J_0(2\pi gr) \cdot r dr = Ha\{f(r)\} \ .$$

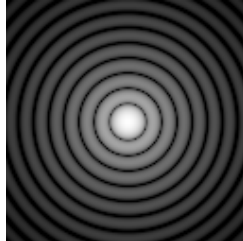
Това интегрално преобразуване се нарича **Ханкеловата интегрална трансформация**, бележи се най-често с $Ha\{f(r)\}$ и се прилага към функции с централна симетрия. Обратната Ханкеловата трансформация се дефинира като

$$f(r) = Ha^{-1}\{F(g)\} = 2\pi \int_0^{\infty} F(g) \cdot J_0(2\pi gr) \cdot g dg$$

Пример: Фурие спектър на единична функция, дефинирана във вътрешността на кръг с радиус a (равномерно осветена кръгла апертура). Комплексната амплитуда на тази функция се описва с осево симетрична прозрачна функция. Нейната Ханкелова трансформация е

$$Ha\left[\Pi\left(\frac{r}{2a}\right)\right] = \frac{a \cdot J_1(2\pi ga)}{g} \ .$$

Разпределението на интензитета в дифракционното петно е показано на следната фигура.



2. ИЗМЕРВАНЕ НА ПРЕМЕСТВАНИЯ И НА РАЗСТОЯНИЯ

Лазерните източници са намерили широко приложение при измерването на разстояния. Основните лазерни методи са обобщени в следната таблица:

Таблица 2.1

Метод	Типичен лазер	Max. разстояние	Типична точност	Област на приложение
Интерферометричен	He-Ne	до 100м (в затворено помещение)	1µm	Контрол на машиностроителни съоръжения, в сеизмологията и геодезията, за калибровка на стандарти за дължина. За проверка на измерителни уреди.
Фазов метод: телеметри с модулация на лъча	He-Ne GaAs	До няколко километра	10 ⁻⁶	Топографски снимки
Импулсен метод: телеметри с Q-модулация	Твърдотелни с Q-модулация	За няколко километра	10 ⁻⁵	Военни далекомери, следене на изкуствени спътници на Земята

2.1. Интерферометрични методи за измерване на разстояния

Лазерните източници, със своите характерни свойства, имат предимство пред класическите източници при измерването на големи разстояния. Това са тяхната висока кохерентност и концентрация на мощност в малък по диаметър и с голяма степен на насоченост сноп. Тези свойства, при подходяща конструкция, спомагат да бъдат измервани разстояния значително по-големи от достъпните за системи с класически източници.

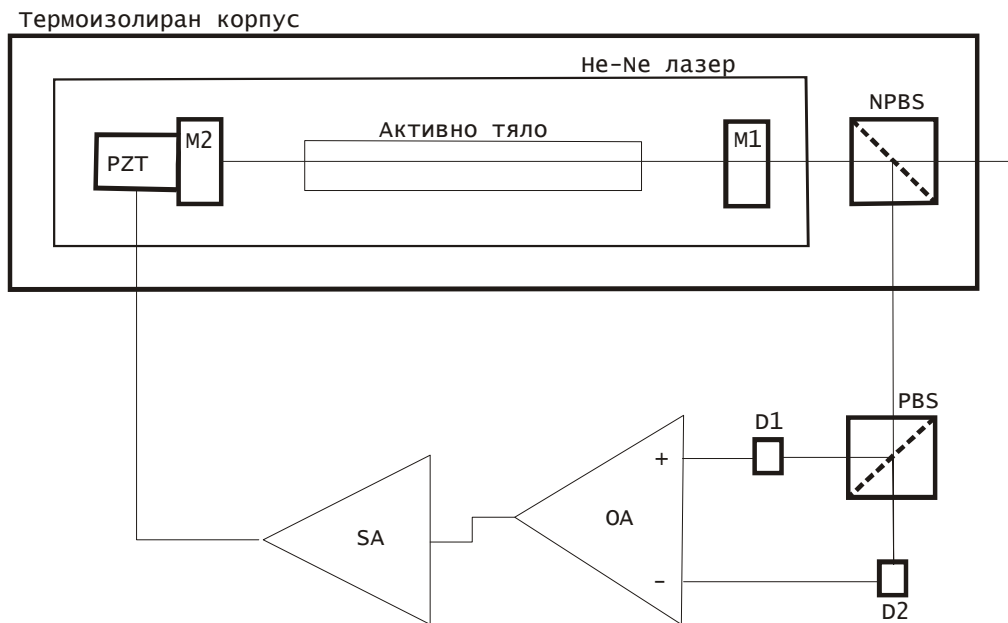
В основната си част интерферометричните системи използват като източник He-Ne лазер, работещ на прехода с дължина на вълната 0,6328 µm, което отговаря на честота $\sim 5 \cdot 10^{14}$ Hz. При честотно нестабилизираните лазери възможната флукуация на честотата е в границите на ширината на линията на флуоресценция на Ne – т.е. около 10⁹ Hz. Това силно ограничава относителната точност на измерването - до 2.10⁻⁶, тъй като генерацията на лазера може да се осъществява на няколко надлъжни мода в рамките на флуоресценция. За да бъде възможно използването на такъв лазер за интерферометрични цели, се налага честотата на генерация да бъде стабилизирана.

2.1.1. Източници. Типични конструкции на честотно-стабилизирани лазери

А. Лазери, стабилизирани по Лембовския провал

В центъра на един надлъжен мод на резонатора се наблюдава неголям спад в мощността на лъчението. Този спад се нарича Лембовски провал. При този тип стабилизирани лазери активно управляваната величина е дължината на резонатора, която се поддържа на такава стойност, та изходната мощност да

бъде на един от склоновете на Лембовския провал. Това се осъществява чрез автоматична настройка на задното (100% - то или “глухото”) огледало M2 на



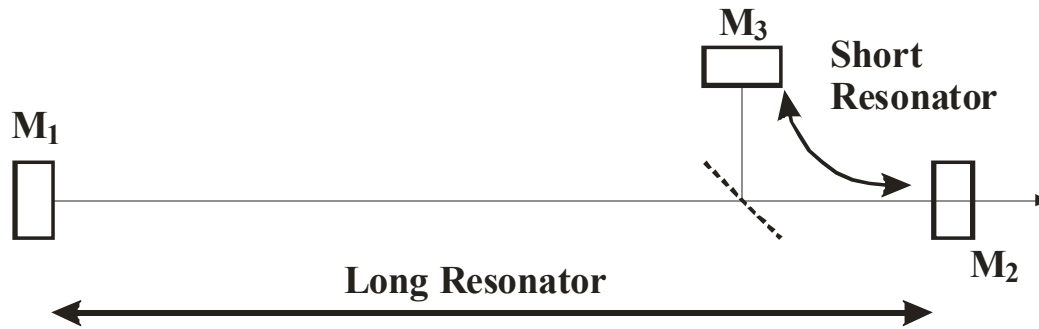
Фиг. 2.1

резонатора. Това огледало е залепено върху пиезо–керамичен преобразувател *PZT*. Сигналът за управление на пиезо–керамиката се получава по следният начин: използва се факта, че надлъжните моди са линейно поляризиращи и, че два съседни мода са с ортогонална поляризация. Промяна в дължината на резонатора води до трансляция на системата от надлъжни моди, намиращи се под контура на усилване (линията на флуоресценция на неона). Това пък от своя страна води до изменение в мощността на отделните модове (тъй като те се ограничават отгоре от контура на усилване). За измерителни цели се използват къси резонатори с цел спектрална чистота на полето. Ако под контура на усилване имаме само два надлъжни мода, на изхода те могат да бъдат отделени с помощта на един поляризационен светоделител *PBS*. Така получените две полета, попадайки върху два фото приемниците *D1* и *D2*, дават два отделни сигнала. Балансът между тях е пропорционален на дължината на резонатора, а от там и на мястото на надлъжните моди под контура на усилване – т.е. на техните честоти. Точно този сигнал, усилен със сервоусилвателя *SA*, се подава на пиезокерамичният преобразувател *PZT*. Обикновено системата се настройва така, че честотата на генерация на работния мод да бъде в центъра на линията на флуоресценция на неона (с цел най-добро използване на мощността), а вторият мод да бъде някъде в периферията. Тази система позволява постигането на висока относителна стабилност на честотата, от порядъка на $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-9}$.

Б. Лазери с пасивна стабилизация

Често пъти, при измервания в малки линейни диапазони се използват резонатори с малка дължина. От тях може да се селектира излъчване само на

един надлъжен мод. Тъй като съседните надлъжни моди се различават по честота с приблизително $\Delta\nu = c/2L$, (L е разстоянието между огледалата на резонатора, c – скоростта на светлината във вакуум, а $\Delta\nu$ е от порядъка на стотици MHz), то с намаляване на L може да се постигне излъчване в рамките на линията на флуоресценция на Ne само за един надлъжен мод. Този метод за получаване на едномодова генерация е за сметка на мощността. Типичните стойности са от порядъка на части от mW . Относителната стабилност на честотата е около $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-6}$.



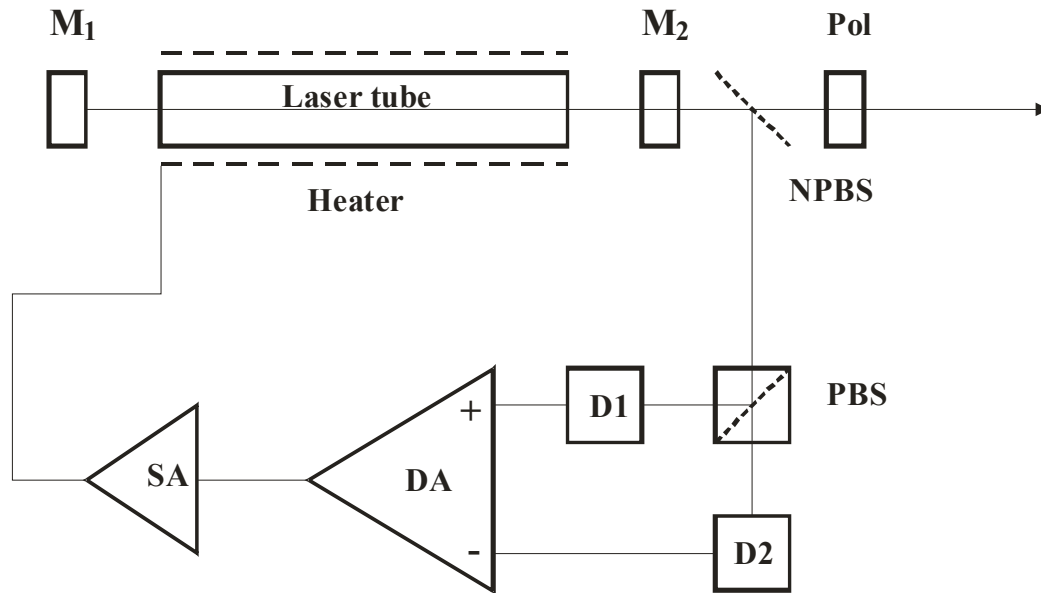
Фиг. 2.1a

По-висока изходна мощност се постига като се използва триогледален резонатор Фиг. 2.1a. Този резонатор се състои от два (M_1M_2 и M_3M_2), значително различаващи се по дължина и вложени един в друг или серийно свързани резонатора. Такъв лазер работи на честота, която има резонанс едновременно и в двата резонатора. Дългият резонатор осигурява високи нива на мощност, а късият – по-чиста модова структура.

В. Лазери с активна термостабилизация на резонатора

На практика, често пъти се оказва, че е достатъчна комбинацията от термостатиран къс резонатор и стабилизация на захранването, Фиг. 2.1б.

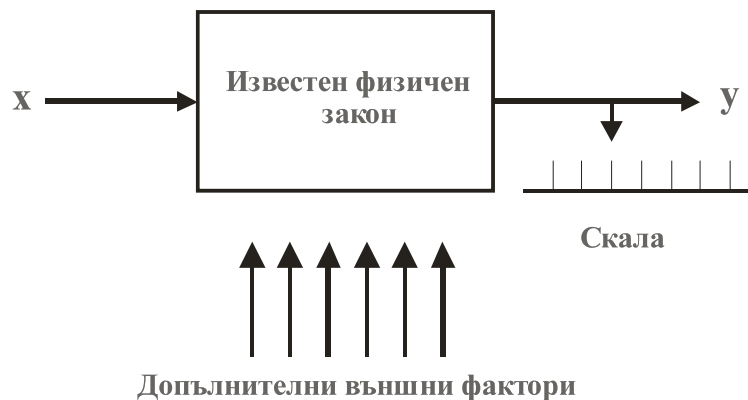
Неполяризиращият светоделител *NPBS* отделя малка част от генерираното поле и го насочва към диференциалния фото-поляриметър, който се състои от поляризационен светоделител *PBS*, фотодиоди *D1* и *D2* и диференциален усилвател *DA*. Сигналят от разликата се усилва от усилвателя *SA* и управлява тока през нагревателя *H*. Нагревателя е навит около лазерната тръба. Дължината на резонатора се определя от температурата на корпуса на тръбата, която се поддържа обикновено в границите $40 - 50^{\circ}C$.



Фиг. 2.16

2.1.2. Основни принципи на интерферометричният метод

Всеки процес на измерване може да бъде онагледен със следната проста схема.



На входа на измерителният процес е физичната величина (x), за която все още не е изградена надеждна скала. Но да предположим, че познаваме природно явление, при което търсената от нас величина се преобразува в друга физична величина (y), за която вече има изградена надеждна метрологична база, казано по-просто, съществува скала и мерна единица, на която можем да се опрем. Тогава можем да твърдим, че, реализирайки споменатото явление с технически средства, наистина измерваме величината x . И то с такава достоверност, с каква е изучено физичното явление (физичният закон), с помощта на което входната величина се преобразува в изходната величина. На всяка физична измерителна система е подложена на действието на множество допълнителни, най-често нежелани, външни фактори. Те коригират първоначалната физична идея за трансформация на информацията и по този начин внасят грешки. Тези фактори

следва също да бъдат добре изучени и тяхното влияние да бъде включено в модела на базовия физичен закон.

При оптичните методи за измерване изходният сигнал е основно интензитета на светлината. Това е така, защото, при високите честоти на оптичните полета, детекторите, които познаваме, реагират на интензитета, т.е. на усреднената във времето стойност на квадрата на модула на амплитудата на полето, а не на самата амплитуда. Например, в радио техниката това не е така. При оптичните измервания входната величина x по силата някакъв закон изменя първоначалното състояние на едно оптично поле. И тази промяна се отчита с измерителния уред.

При интерферометричният метод за измерване на линейни величини (премествания и разстояния), търсената величина се трансформира в разпределението на интензитета в резултантното оптично поле на изхода от уреда. Тези измервания се базират основно на две оптични идеи (два оптични закона):

- Двулъчева интерференция.

При този метод измерваното разстояние се преобразува в оптически сигнал на базата на *закона за двулъчева интерференция*. Най-често срещаните конструктивни схеми са модификации на класическия интерферометър на Майкелсон и на двулъчевия на Физо. Съществуват също така и други конструкции и те ще бъдат разгледани в отделна глава.

- Многолъчева интерференция.

При този метод основният закон, по който се трансформира информацията е *закона за многолъчевата интерференция*. Основна, най-често срещана, е схемата на интерферометъра на Фабри-Перо, но също така и многолъчевия интерферометър на Физо, както и други, специални конструкции.

На тези два основни метода са посветени следващите две глави. При това, навсякъде основният акцент ще бъде върху зависимостта на изходния сигнал от целия ансамбъл величини, които биха могли да му повлияят. Вторият метод, който има огромно значение за техниката, ще бъде разгледан в отделна глава.

А. Схема на интерферометър на Майкелсон с плоски огледала

Както знаем от общия курс, между две плоски вълни, отразени от двойка успоредни равнинни огледала (или планпаралелен диелектричен слой), Фиг. 2.3, възниква фазовата разлика

$$\delta = 2kt \cos \theta \doteq k(2t - t\theta^2)$$

където t е разстоянието между огледалните повърхности, k – вълновото число за дадената среда, θ е ъгълът на падане. Разликата в оптичните им пътища е

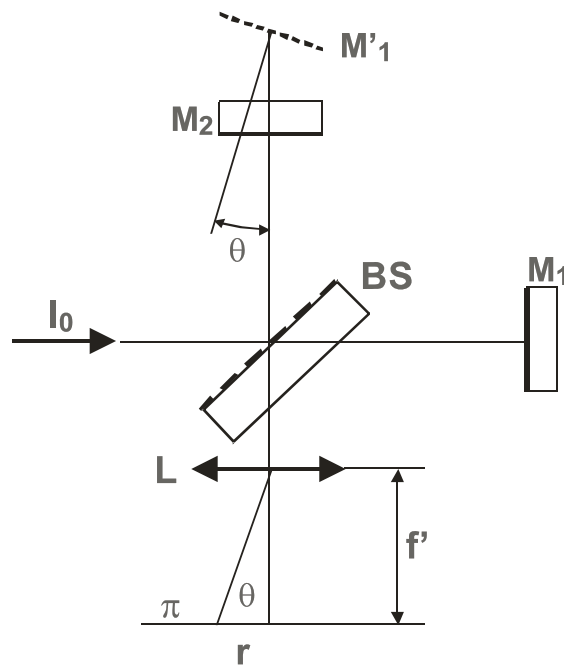
$$\Delta L = \frac{\delta}{k} \doteq 2t - t\theta^2 = N\lambda, \text{ където } N = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Детекторът е разположен в равнината на наблюдение π , Фиг. 2.2. Необходимо е да бъде използван колимационен обектив, с фокусно разстояние f' , за да бъдат ивиците, локализирани в безкрайност, изобразени върху чувствителната повърхност на приемника. Ако в равнината на детектора π въведем локални полярни координати (r, φ) , то ъгловата координата на образа на източника ще бъде

$$\theta \doteq \frac{r}{f'} = r$$

при $f' = 1$, като този избор не ограничава общата валидност на разглеждането. Разликата в оптичните пътища между двете интерфериращи вълни, изразена в полярни координати (r, φ) , за ивиците с максимален интензитет, е:

$$\Delta L = 2t - t.r^2 = N\lambda$$



Фиг. 2.2

Задача: Изведете горните формули.

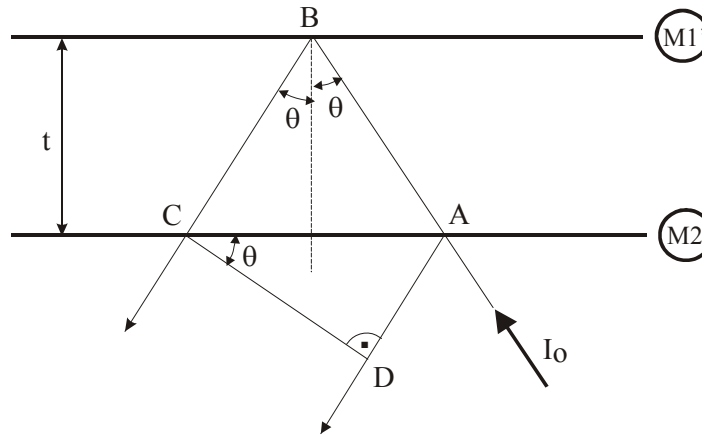
Решение:

Ако M'_1 е образът на огледалото M_1 в светоделителя (Фиг. 2.2 и Фиг. 2.3), то пътищата на двата снопа в отделните рамена на интерферометъра са съответно \overline{IABC} и \overline{IAD} . Разликата между тези оптични пътища ΔL , съгласно горната схема, е:

$$\Delta L = \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AD} = 2\overline{AB} - \overline{AD} ,$$

където за отделните отсечки имаме:

$$\overline{AB} = \frac{t}{\cos \theta}, \quad \overline{AC} = 2t \cdot \operatorname{tg} \theta, \quad \overline{AD} = \overline{AC} \sin \theta = 2t \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \sin \theta$$



Фиг. 2.3

и търсената разлика е:

$$\Delta L = \frac{2t}{\cos \theta} - 2t \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{2t}{\cos \theta} \cos^2 \theta = 2t \cos \theta$$

Б.Схема с ъглови отражатели

Нека заменим плоските огледала с ъглови отражатели. Ъгловият отражател (или ъгъл на куб, трепел призма) е елемент, състоящ се от три взаимно перпендикулярни плоски огледала. Лъч, попаднал в такъв отражател, търпи три отражения и се връща обратно, успоредно на падащия. Обикновено се изработва от оптично стъкло или топен кварц, и представлява равнинен отрез от масивен куб с равнина, перпендикулярна на оста на тристенния пространствен ъгъл. Равнината на среза е входно-изходното чело на призмата. Ъгловият отражател има едно основно свойство, а именно, изходящия лъч не променя направлението си при завъртане на призмата. Има една точка, характерна за всеки ретро рефлектор, завъртането на елемента около нея не води до промяна в разстоянието между входния и изходния лъч. Тази точка се нарича оптичен център на отражателя. Тогава, за простота на изложението, бихме могли да представим всеки ъглов отражател чрез плоско огледало, минаващо през

оптичния му център, като едновременно не забравяме да отчетем и неговото положение в пространството. Така ще постъпим и при нашето разглеждане.

На фигурата (Фиг. 2.4) сме означили с:

C_S - оптичния център на неподвжния (или както още се нарича - опорен) ъглов отражател,

C_m - оптичния център на подвижния (измерителен) ъглов отражател,

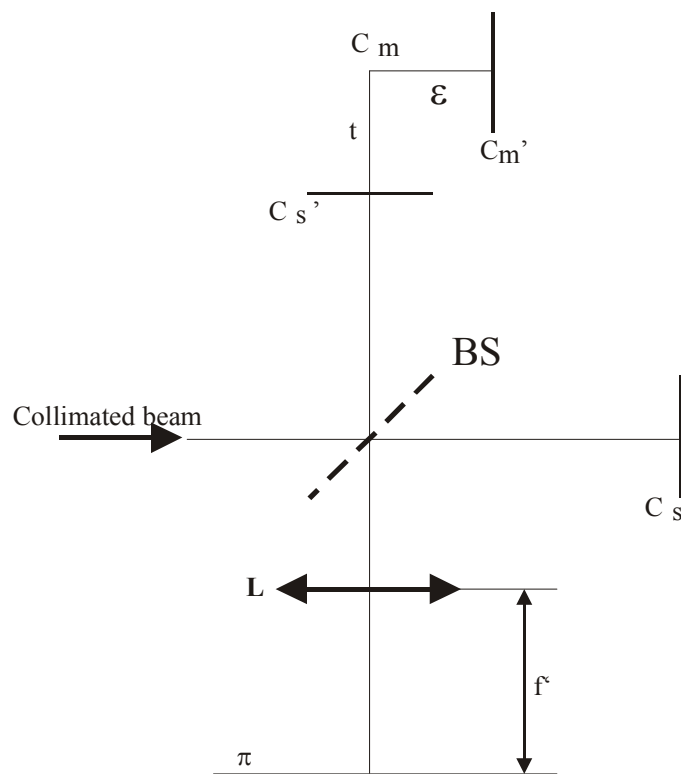
C'_m - реалното положение на центъра на измерителния ъглов отражател при наличието на полезно отместване t и нежеланото напречно отместване

$$\varepsilon = \overline{C_M C'_M};$$

$\overline{C'_S C_M}$ - измерваното разстояние t по направление на оптичната ос.

В този случай разликата в оптичните пътища е:

$$\Delta L = 2t + 2\varepsilon r \cos \varphi - tr^2$$

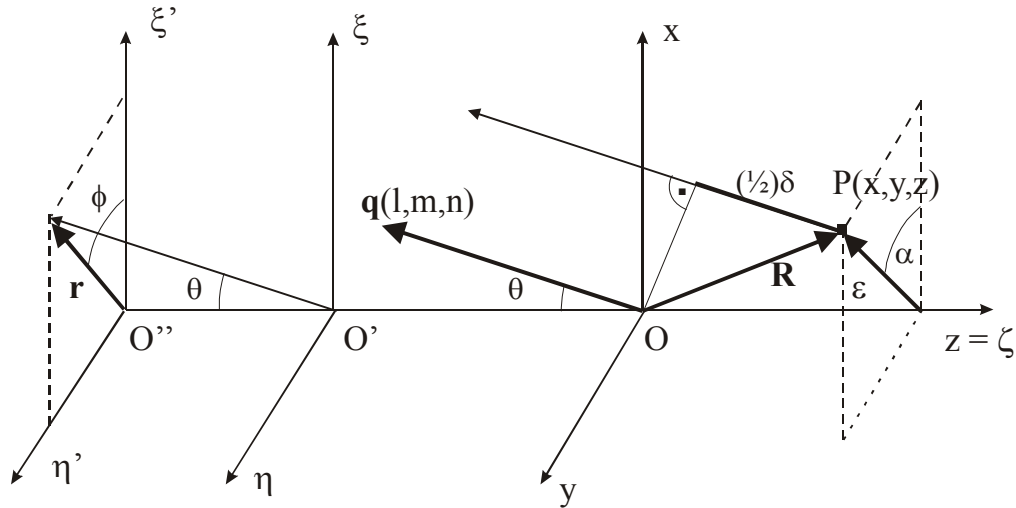


Фиг. 2.4

Задача: Изведете горната формула.

Решение: Нека в началото на измерването оптичният център на подвижния отражател бъде в началото O на правоъгълната декартова система $Oxuz$, ориентирана така, че оста z да съвпада с оптичната ос на уреда, Фиг. 2.5.

Крайното положение нека бъде т. P с координати (x,y,z) . Разликата в оптичните пътища между тези две положения на ъгловия отражател ще означим с δ . Тези две крайни положения се определят от координатите на оптичния център на ъгловия отражател. Тогава половината от разликата в пътищата на два лъча, единият, отразен от призма чийто оптичен център съвпада с началото O (отражател без отместване) и втори, чийто оптичен център е в точка $P(x,y,z)$ е



Фиг. 2.5

$$\left(\frac{1}{2}\right)\delta = \mathbf{q} \cdot \mathbf{R} = l \cdot x + m \cdot y + n \cdot z ,$$

т.е., два пъти проекцията на радиус вектора $\mathbf{R} = \overline{OP}$ върху направлението на колимираният оптичен сноп, зададено с единичният вектор $\mathbf{q}(1, m, n)$, Фиг. 2.5.

Нека също така, за удобство при записва, изберем още следните помощни координатни системи:

$(O'\xi\eta)$ - в равнината на входната зеница на фокусираната оптична система,

$(O''\xi'\eta')$ - в образната фокална равнина на същата система.

За област близка до оптичната ос важи, че

$$r \cdot \cos \varphi \doteq f' \cdot l \Rightarrow l = \left(\frac{r}{f'}\right) \cos \varphi$$

$$r \cdot \sin \varphi \doteq f' \cdot l \Rightarrow m = \left(\frac{r}{f'}\right) \sin \varphi$$

$$n = \cos \theta$$

$$\text{като също така } \left(\frac{r}{f'}\right) \doteq \sin \theta \doteq \theta .$$

Тогава, тъй като координатите на точка P са

$$x = \varepsilon \cos \alpha, \quad y = \varepsilon \sin \alpha, \quad z = t,$$

то

$$\left(\frac{1}{2}\right)\delta = \left(\frac{r}{f'}\right)\varepsilon \cos \varphi \cos \alpha + \left(\frac{r}{f'}\right)\varepsilon \sin \varphi \sin \alpha + t \cos \theta$$

или

$$\delta = 2t \cos \theta + 2\varepsilon \left(\frac{r}{f'}\right) \cos(\varphi - \alpha)$$

С цел опростяване (без загуба на общовалидност), тъй като δ зависи единствено от разликата $(\varphi - \alpha)$ полагаме $\alpha = \theta$, с което горното твърдение е доказано.

В идеалният случай, интензитетът на резултантното поле на изхода от един двулъчев интерферометър е величина, пропорционална на

$$I = [1 + \cos(k\Delta L)].$$

Както е известно, тук се предполага наличието на пълна взаимна корелация между трептенията в двете полета (пълна взаимна кохерентност), на балансиран интензитет в двете рамена, на хомогенни изотропни среди на разпространение на вълните и отсъствие на всякакви грешки, водещи до различия с основната оптична схема.

Нека изследваме влиянието на споменатите по-горе “грешки” в стойността на оптичния път върху този модел на детектиран сигнал за един интерферометър с ъглови отражатели.

Ако изходната зеница на интерферометъра съвпада с входната на детектора, то до голяма степен можем да считаме, че енергетичните загуби от винетация ще бъдат минимални. Нека тази зеницата е кръгла, с радиус R . Тогава потокът енергия, преминал през нея, ще бъде пропорционален на:

$$F = \int_{(S)} IdS = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left\{ \left[1 + \cos \left[k \left(2t + 2\varepsilon r \cos \varphi - tr^2 \right) \right] \right] \right\} r dr d\varphi$$

Този интеграл е изследван в учебниците по математичните методи. За удобство нека въведем безразмерните променливи:

$$p = 2kt \left(\frac{R}{f'}\right)^2; \quad \text{величина, право пропорционална на измерваното разстояние } t,$$

и

$$q = 2k\varepsilon \left(\frac{R}{f'}\right), \quad \text{която зависи от напречното отместване } \varepsilon \text{ на отражателя.}$$

Отново, без загуба на общовалидност, нека $f' = 1$. Решението на горният интеграл има вида

$$F(p, q) = \pi R^2 \{1 + m(p, q) \cos[2kt - \Psi(p, q)]\},$$

където

$$\left. \begin{aligned} m(p, q) &= \left(\frac{2}{p}\right) (U_1^2 + U_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ \Psi(p, q) &= \left[\frac{p}{2} - \arctg\left(\frac{U_2}{U_1}\right)\right] \pm n\pi \end{aligned} \right\}, \quad \text{когато } \left|\frac{p}{q}\right| < 1,$$

$$\left. \begin{aligned} m(p, q) &= \left(\frac{2}{p}\right) \left[1 + V_0^2 + V_1^2 - 2V_0 \cos\left(\frac{p}{2} + \frac{q^2}{2p}\right) - 2V_1 \sin\left(\frac{p}{2} + \frac{q^2}{2p}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ \Psi(p, q) &= \left\{ \frac{p}{2} + \arctg \left[\frac{V_0 - \cos\left(\frac{p}{2} + \frac{q^2}{2p}\right)}{V_1 - \sin\left(\frac{p}{2} + \frac{q^2}{2p}\right)} \right] \right\} \pm n\pi \end{aligned} \right\} \quad \text{когато } \left|\frac{p}{q}\right| > 1$$

$U(p, q)$ и $V(p, q)$ са функциите на Ломел от две променливи, (*Lommel*), които са дефинирани като:

$$U_n(p, q) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{p}{q}\right)^{2j+n} J_{2j+n}(q)$$

$$V_n(p, q) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{q}{p}\right)^{2j+n} J_{2j+n}(q)$$

Виждаме, че в основата си $F(p, q)$ е хармонична функция от измерваното преместване t . Контрастът (дълбочината на модулация на детектирания фототок) и фазата на сигнала са величини променливи – зависят както от конструкцията на уреда, така и от разстояката му по време на работа.

Модулацията на детектирания изходен сигнал (контраста) е

$$\frac{F_{\max} - F_{\min}}{F_{\max} + F_{\min}} = m(p, q)$$

и е показана на Фиг. 2.6 във функция от p за дискретни стойности на q .

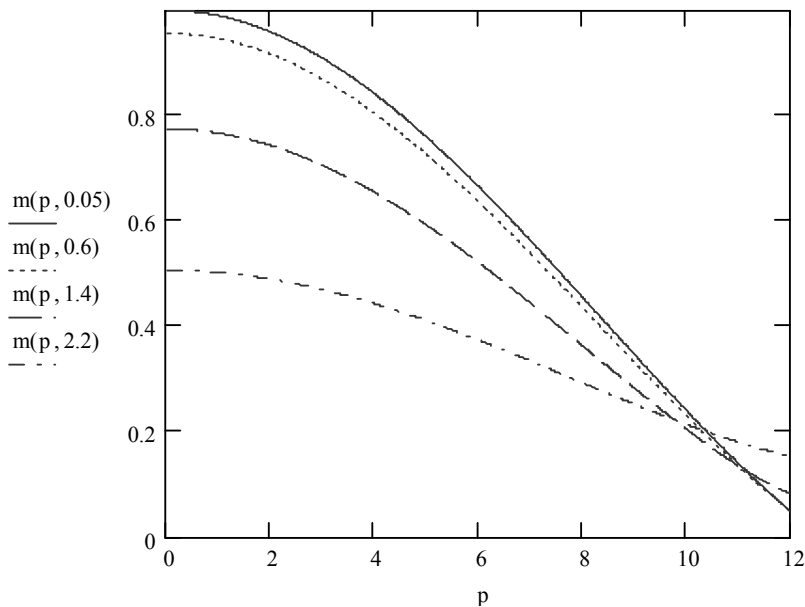
В двата крайни гранични случая на безкрайно малка площ на детектора или на нулева напречна разстройка на отражателя, модулацията клони към стойностите:

$$m(0, q) = \frac{2J_1(q)}{q} \quad ; \quad m(p, 0) = \frac{\sin(p/4)}{(p/4)}.$$

Следователно, контрастът на детектирания сигнал ще клони към единица единствено, ако едновременно $R \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$.

Чрез тази диаграма може за даден интервал на измерване да се избере оптималният радиус R на апертурата и допустимата стойност ε на напречно изместване на ъгловия отражател.

Спадането на контраста на детектирания сигнал, както и неговото фазово отместване, в резултат на вредни разстройките по време на работа на уреда, се отразяват на линейната точност на измерването. Причина за това е преобразуването на квази-хармоничния оптичен сигнал в електрически импулси за реверсивно броене.



Фиг. 2.6

2.1.3. Основни схеми на лазерни интерферометри

Измерването на преместване с лазерни интерферометри има някои характерни особености. Не случайно използваме израза “преместване” вместо “разстояние”. При този метод за линейни измервания търсеното разстояние трябва да бъде изминато от измерителния отражател. Следователно, ъгловия отражател трябва да бъде носен от движещ се детайл на машината или на друго съоръжение, като по този начин точно “копира” търсеното преместване. Измерването следва да започне от някое физически зададено начало на отчитане. Неговото установяване е важна част от тази измерителна задача. След като е установена началната точка на измерване, уреда се нулира, след което протича самото измерване.

Принципът на измерване се базира на техниката на броене на интерференционни ивици. Величината, измерена от лазерния интерферометър се равнява на оптическия път, изминат от подвижния отражател

$$L = L.n,$$

където L е изминатото от отражателя разстояние, а n е показателя на пречупване на средата, в която се движи отражателя – обикновено на въздуха. Тази величина се изразява в брой дължини на вълната или, съответно, на някаква част от дължината на вълната, в зависимост от конструктивното решение. Тук “метърчето”, което, образно казано, налагаме върху търсеното разстояние, е дължината на вълната. Или

$$L = m \cdot \lambda,$$

където m е реално число. И стигаме до основното правило при интерферометричния метод за измерване на разстояния:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda},$$

относителната точност на измерването е равна на относителната точност, с която познаваме стойността на дължината на вълната.

За да бъде осигурена висока точност на измерването, се налага въвеждането на поправка на λ в зависимост от изменението на показателя на пречупване на въздуха.

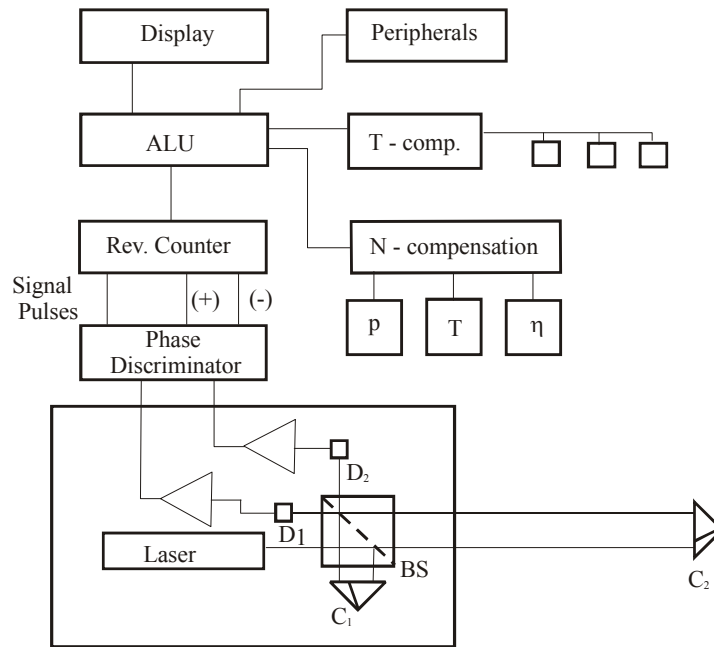
Тази корекция най-често се извършва по следния емпиричен закон. Ако показателя на стандартен сух въздух n_{dry} , т.е. въздух със съдържание на CO_2 0,03% при $T=15^\circ C$ и при налягане $p = 760 \text{ mmHg}$ и за $\lambda=0,63299138 \text{ }\mu\text{m}$ е $n_{dry} = 1,0002765$. Поправката, свързана с изменението на температурата, налягането и влажността, е:

$$(n-1) = (n_{dry} - 1) \cdot \left(\frac{p}{720.775} \right) \cdot \left[1 + \frac{P(0.817 - 0.0133T)10^{-6}}{(1 + 0.003662T)} \right] - 5.6079 \cdot 10^{-8} f,$$

където f е парциалното налягане на водната пара при температура T [$^\circ C$] и пълно атмосферно налягане P [mmHg]. Тук се предполага, че съдържанието на CO_2 е като при стандартен въздух. В повечето случаи ефектите, свързани с изменението на концентрацията на CO_2 са малки. Но в редица случаи, (в някои производствени условия или др.) при високо съдържание на CO_2 могат да възникнат значителни грешки. Когато се налага да се работи в подобни условия се използват допълнителни уреди за измерване концентрацията на CO_2 или пряко измерване на показателя на пречупване по трасето на измерителната призма. Корекцията може да се извършва автоматично или ръчно.

Като пример ще отбележим, че

- при нарастване на налягането P с 1 mmHg, n се изменя с $(+)0,36 \cdot 10^{-6}$,
- нарастване на температурата T с $1^\circ C$, води до изменение на n с $(-)0,96 \cdot 10^{-6}$,
- повишаването на f с 1 mm Hg изменя n с $(-)0,06 \cdot 10^{-6}$.

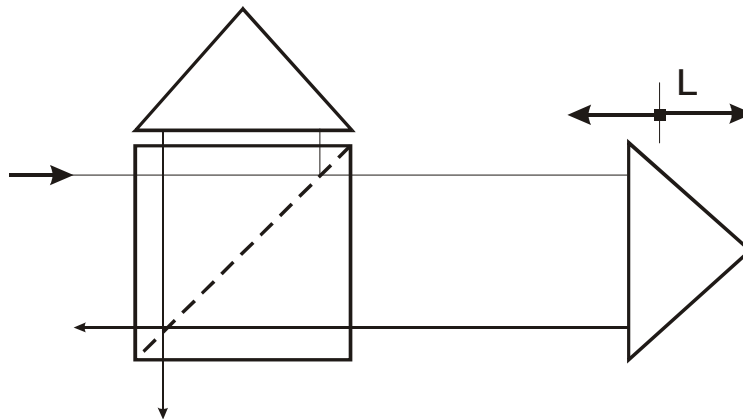


Фиг. 2.7

2.1.3.1. Оптични схеми на лазерни интерферометри

А. Фазата на интерферометричния сигнал в основните схеми на лазерни интерферометри за линейни измервания.

а). Основната схема за измерване на преместване по една координата е показана на Фиг. 2.8. Фазовата разлика между двата интерфериращи снопа, в резултат на придвижване на измерителния отражател на разстояние L , е равна на $\varphi = 2kL$.

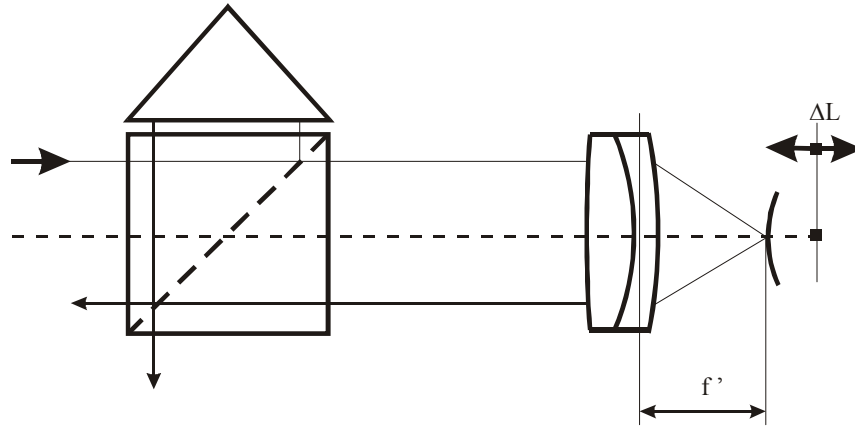


Фиг. 2.8

б). Към стандартното оборудване на всеки лазерен интерферометър за индустриални цели принадлежи серия обективи за реализация на схемата за безконтактно измерване на малки премествания и за анализ на вибрации. Тази

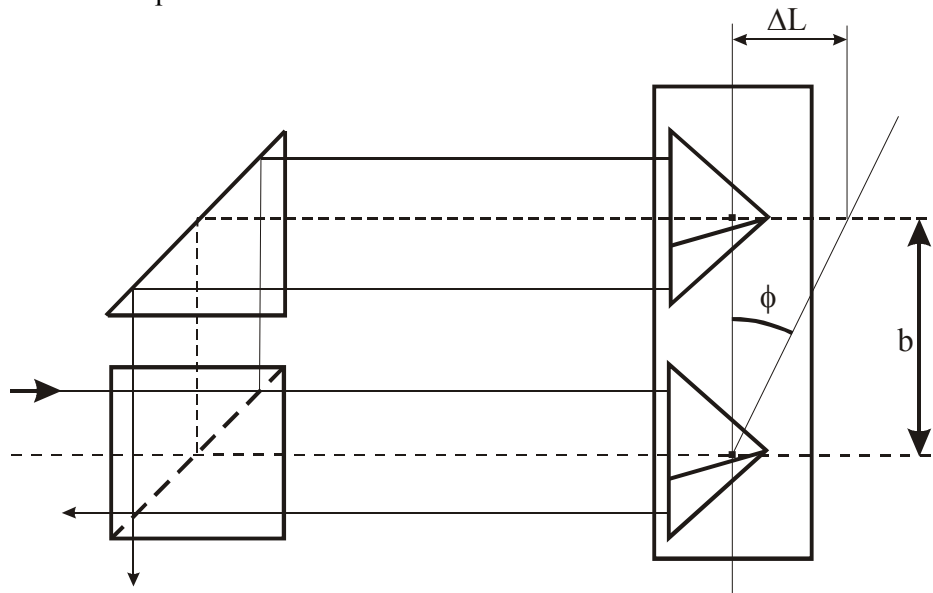
схема е изобразена на Фиг. 2.9. Фазовата разлика между двата интерфериращи снопа, в резултат на придвижване на контролираната повърхност на разстояние

$$\Delta L, \text{ е равна на } \varphi = 2k \left(\frac{f}{\sqrt{f^2 + d^2}} \right) \Delta L.$$



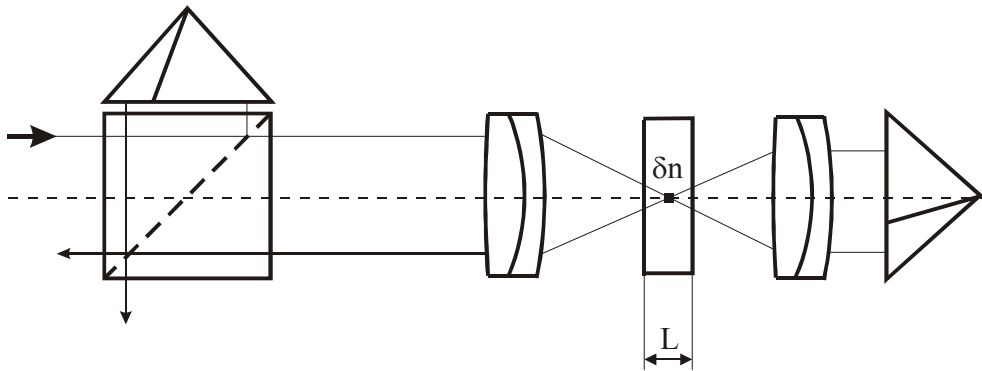
Фиг. 2.9

в). Стандартното оборудване на всеки лазерен интерферометър за индустриални цели е и приставката за реализация на схема на диференциален интерферометър за измерване на малки завъртания (ъгли). Схемата на диференциалния интерферометър е показана на Фиг. 2.10. Фазовата разлика между двата интерфериращи снопа е в резултат на релативното отместване ΔL на двата отражателя при завъртане на техния носач. Тя се равнява на $\varphi = 2k\Delta L$, където $\Delta L = b \tan \phi$, b е базисът на уреда, а ϕ е ъгълът на завъртане на носача на двата ъглови отражателя.



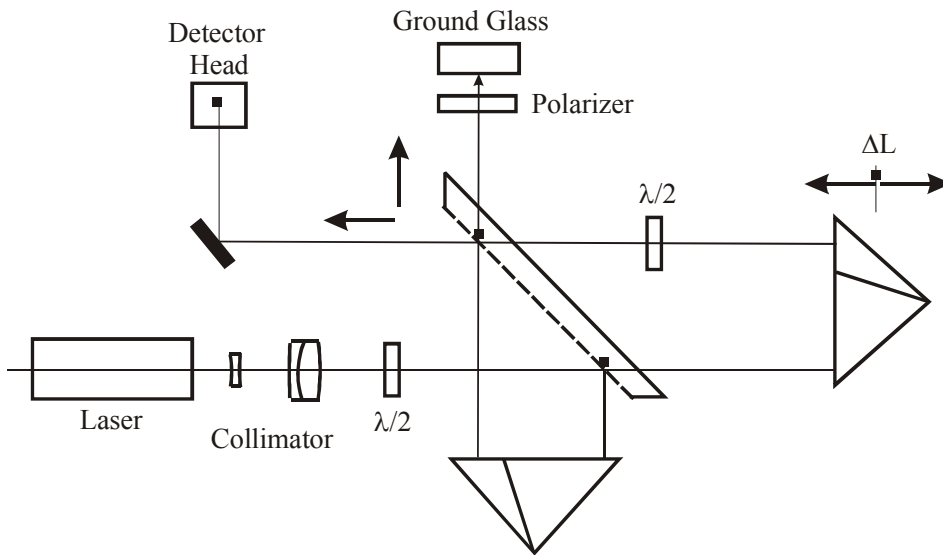
Фиг. 2.10

г). Към стандартното оборудване на всеки лазерен интерферометър може да се поръча приспособлението за измерване на малки разлики в оптичския показател на пречупване на среда. Схемата е показана на Фиг. 2.11. Това е интерферометър с двоен проход на вълната през измервания обем. Фазовата разлика между двата интерфериращи снопа се равнява на $\varphi = 4\pi\Delta n \left(\frac{L}{\lambda_{med}} \right)$



Фиг. 2.11

Б. Схема на интерферометъра на fy Metra, Blansko

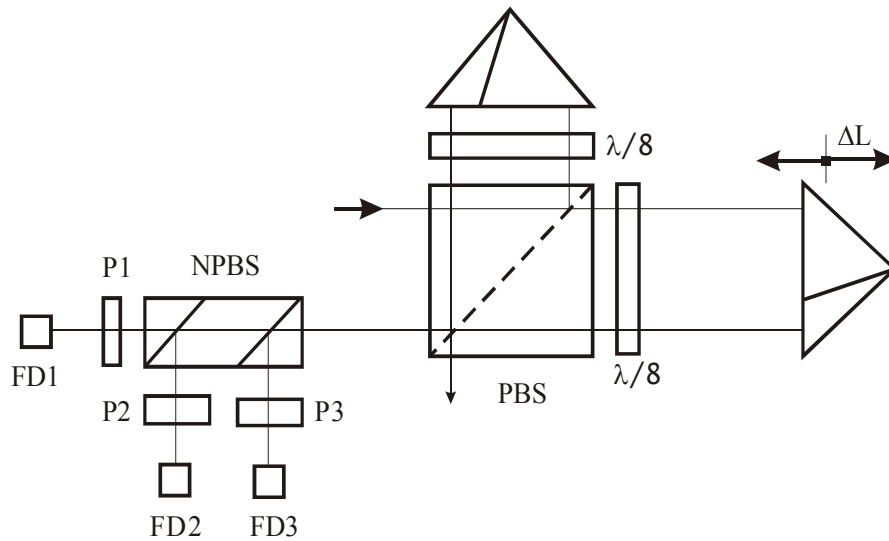


Фиг. 2.11

В. Схема на интерферометъра на fy Sorro (Франция)

При този уред (Фиг. 2.12) резултантното интерферометрично поле се обработва допълнително по оптичен път с цел постигане на реверсивност на измерването и нечувствителност на резултата от постояннотоковото ниво (то се влияе основно от външно паразитно осветяване, колебания в мощността на източника и др.) на електрическия сигнал. Снопът преминава през детекторния

блок, където се разделя на три помощни сигнала от неполяризиращия светоделител *NPBS*. Трите линейни поляризатора *P1*, *P2* и *P3* са настроени така, че сигналите, детектирани от трите фотодиода *FD1*, *FD2*, и *FD3*, да имат съответно вида



Фиг. 2.12

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= A_0 + A \cdot \cos \varphi \\ U_2 &= A_0 + A \cdot \cos(\varphi + 90^\circ) \\ U_3 &= A_0 + A \cdot \cos(\varphi + 180^\circ) \end{aligned} \right\}$$

или с други думи, те са фазово отместени през $\pi/2$. Следващият стадий е обработка на електрическите сигнали от фотодетекторите. С помощта на два диференциални усилвателя от втория сигнал се изважда първия и третия. Така се формират два нови сигнала, които са в квадратура (отместени по фаза на $\pi/2$) и независими от постояннотоковото ниво:

$$\begin{aligned} U_1 - U_2 &= \sqrt{2} A \cos(\varphi - 45^\circ) \\ U_3 - U_2 &= \sqrt{2} A \cdot \cos(\varphi + 45^\circ) \end{aligned}$$

Следващата обработка се базира на стандартната процедура на реверсивно броене на ивици и компенсация на показателя на пречупване на въздуха.

Г. Схема на интерферометъра на Carl Zeiss, Jena

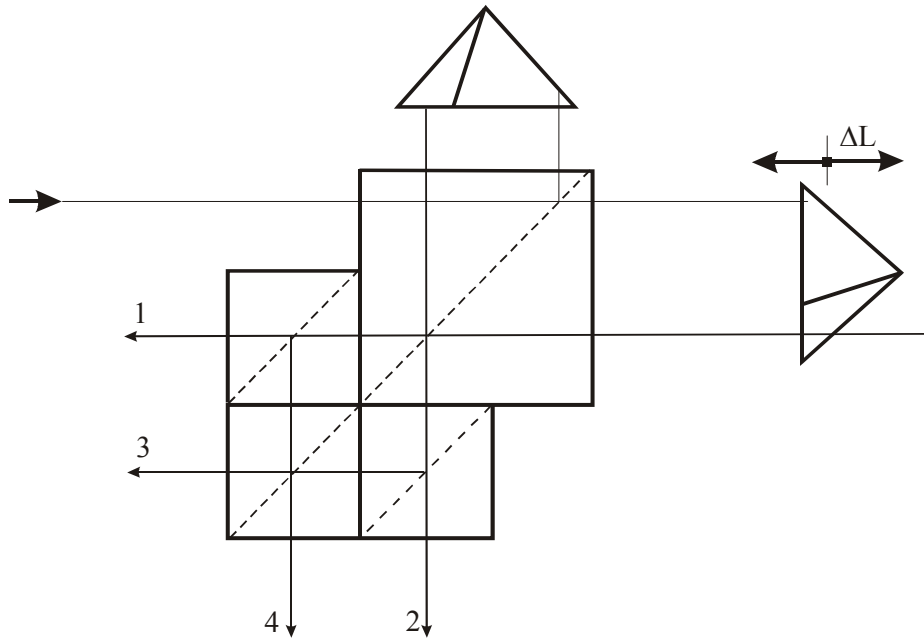
При този уред (Фиг. 2.13), с помощта на съставен фазов светоделител, се формират четири сигнала, фазово отместени през $\pi/2$. Следващата обработка на сигналите е подобна на тази, описана в предишния пример.

$$U_1 = A_0 + A \cdot \cos \varphi$$

$$U_2 = A_0 + A \cdot \cos(\varphi + 180^\circ)$$

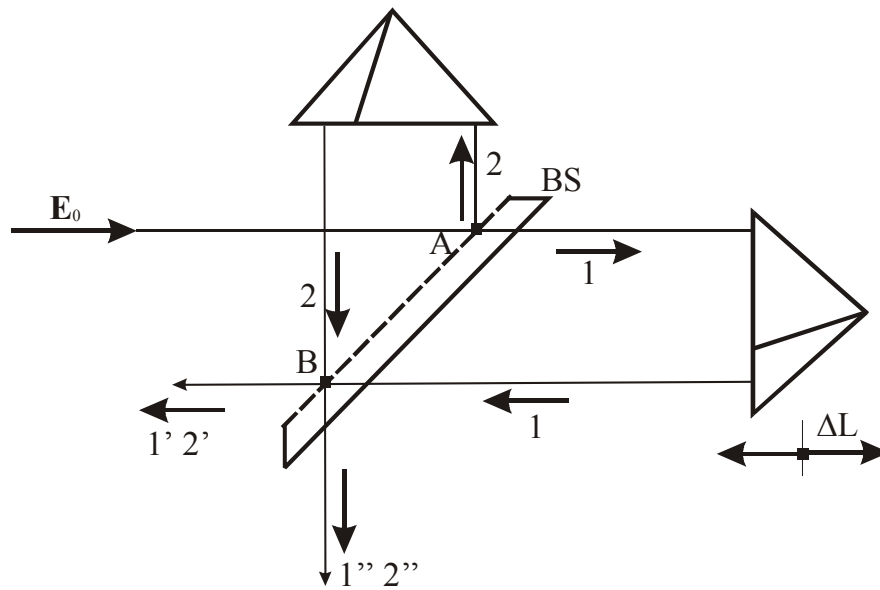
$$U_3 = A_0 + A \cdot \cos(\varphi + 90^\circ)$$

$$U_4 = A_0 + A \cdot \cos(\varphi + 270^\circ)$$



Фиг. 2.13

1.4. Лазерен интерферометър с фазов светоделител



Фиг. 2.14

При наслагването на две вълни (Фиг. 2.14) с комплексни амплитуди

$$E_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$$

$$E_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$$

Интензитетът на резултантното поле е

$$I \sim (E_1 + E_2) \cdot (E_1 + E_2)^* = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Нека разгледаме функцията на светоделител/делител с определени фазови свойства. Комплексните Френелови коефициенти нека запишем като

$$\hat{r}_R, \hat{t}_R \Rightarrow \text{надясно}; \quad \hat{r}_R = r_R \exp[i\delta_R]; \quad \hat{t}_R = t_R \exp[i\partial_R]$$

$$\hat{r}_L, \hat{t}_L \Rightarrow \text{наляво}; \quad \hat{r}_L = r_L \exp[i\delta_L]; \quad \hat{t}_L = t_L \exp[i\partial_L]$$

Ако комплексната амплитуда на падащата монохроматична равнинна вълна е: $E = A e^{i\varphi_0}$, то амплитудите на съответните снопове ще бъдат

$$\text{Сноп 1} \dots\dots\dots A t_R \exp[i(\varphi_0 + \partial_R)];$$

$$\text{Сноп 2} \dots\dots\dots A r_R \exp[i(\varphi_0 + \delta_R)];$$

$$\text{Сноп 1'} \dots\dots\dots A t_R t_L \exp[i(\varphi_0 + \partial_R + \partial_L)];$$

$$\text{Сноп 2'} \dots\dots\dots A r_R^2 \exp[i(\varphi_0 + 2\delta_R)];$$

$$\text{Сноп 1''} \dots\dots\dots A t_R r_L \exp[i(\varphi_0 + \partial_R + \delta_L)];$$

$$\text{Сноп 2''} \dots\dots\dots A r_R t_R \exp[i(\varphi_0 + \delta_R + \partial_R)];$$

Фазата на резултантното поле, формирано от двойката снопове 1'2' е

$$(\varphi_2 - \varphi_1)' = 2\delta_R - \partial_L - \partial_R,$$

а на това от сноповете 1''2'' е

$$(\varphi_2 - \varphi_1)'' = \delta_R - \delta_L.$$

Фазовата разлика между двата интерференчни сигнала е

$$\Phi = (\varphi_2 - \varphi_1)' - (\varphi_2 - \varphi_1)'' = \delta_R + \delta_L - \partial_R - \partial_L = \delta_R + \delta_L - 2\partial_R.$$

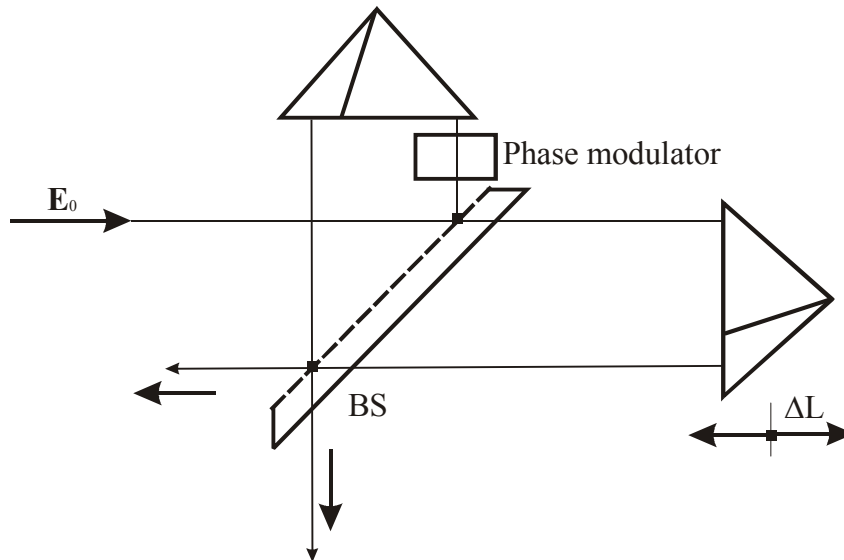
За да бъдат двата сигнала в квадратура, е необходимо да бъде изпълнено следното условие: $\Phi = \frac{\pi}{2}$

Забележка: При този метод е необходимо е да бъдат отчетени допълнителните поляризационните ефекти във всяко от рамената на интерферометъра. В една

реална конструкция на оптичния уред, допълнителните фазови отмествания са неизбежни.

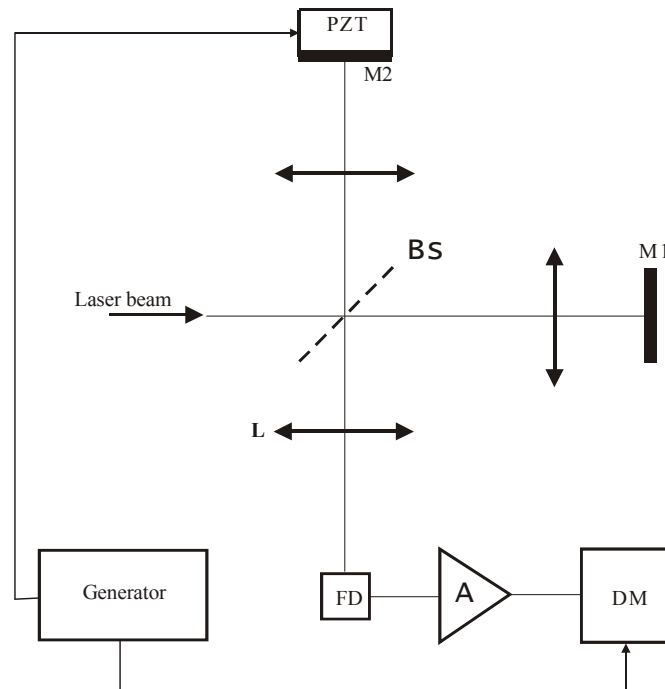
2.1.5. Лазерни интерферометри с фазова модулация

Тези уреди намират приложение при измерването на малки премествания с висока точност. Например, деформации на повърхности в резултат на обемни изменения причинени от термични (изследване на полупроводникови прибори), биологични (живи клетки) и други процеси.



Фиг. 2.15

Тези уреди се проектират както за измерване на големи премествания (Фиг. 2. 15), така и за работа в много малки линейни диапазони (Фиг. 2. 16). Оптичната конструкция на уредът, показан схематично на Фиг. 2.15, представлява в действителност класически интерферометър на Майкелсон с ъглови отражатели. В едното рамо е поставен оптически фазов модулатор, който въвежда допълнителна хармонично изменяща се фазова разлика между двете интерфериращи вълни. При отражател в състояние на покой, изходният интерференчен сигнал и съответния нему електрически сигнал се изменят хармонично с честотата на модулация. При движение на измерителния отражател двете модулации се суперпонира и вида на изходния сигнал се различава съществено от този при простата двулъчева интерференция. Прякото измерване на преместване чрез броене на ивици не е възможно. Обикновено в тези уреди се прилагат добре разработените за целите на радиотехниката методи за демодулация и извличане на основния двулъчев интерферометричен сигнал. Аналогична е ситуацията и при уреда, показан на Фиг. 2.16. При него допълнителната фазова модулация се осъществява чрез хармонична трансляция на опорното огледало M_2 с помощта на пиезо керамичен преобразувател PZT . Сигналят от основния генератор се подава едновременно към пиезокерамиката и демодулатора DM , където става смесването на двата сигнала и извличането на полезния интерферометричен сигнал.



Фиг. 2.16

Тази идея се радва на благоприятно развитие особено след появата на лазерните диоди. Тези източници позволяват пряка амплитудна модулация на основното оптично поле. Едно приложение е показано на следният пример. Токът на инжекция на лазерния диод е хармонично модулиран с честота f_m

$$i(t) = i_0 + \Delta i \cos(2\pi f_m t + \varphi_1),$$

където е следва да бъде осигурено условието за работа над преговия ток i_{th}

$$i_0 - \Delta i > i_{th}.$$

Амплитудата на изходния сигнал има вида

$$E(t) = E_0 \left[1 + M \cos(2\pi f_m t + \varphi_2) \right] \exp \left\{ i \left[2\pi \nu_0 t + \frac{\Delta \nu}{f_m} \sin(2\pi f_m t + \varphi_3) \right] \right\},$$

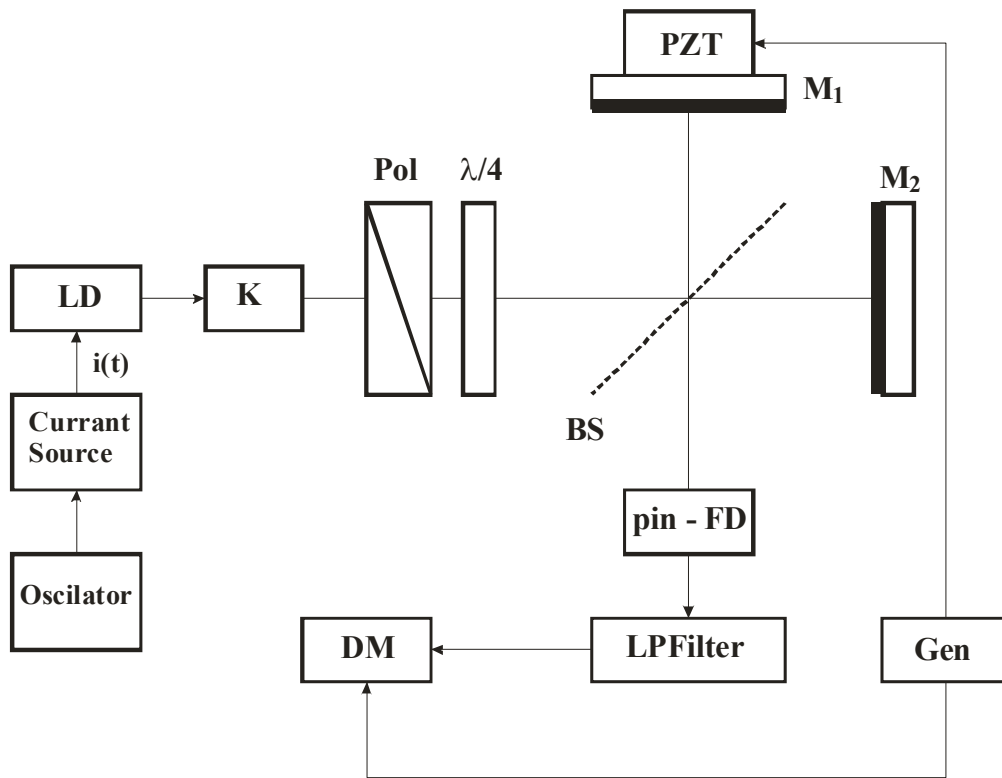
където членът $\left[1 + M \cos(2\pi f_m t + \varphi_2) \right]$ описва амплитудната модулация, а $\frac{\Delta \nu}{f_m} \sin(2\pi f_m t + \varphi_3)$ фазовата модулация. Величината M е индекса на AM модулация. При малка дълбочина на модулация m може да се допусне, че $M \sim m/2$. Детектираният от приемника интерферометричен сигнал е с интензитет

$$I(t) = \frac{1}{2} \langle |E_1(t) + E_2(t + \tau)|^2 \rangle,$$

където полезното (измерваното) закъснение е означено като $\tau = \Delta L/c$, предполагайки, че $f_m \tau \ll 1$. Постоянно – токовата компонента на интензитета се равнява на

$$I_{DC} = \left[\frac{(E_{10}^2 + E_{20}^2)}{2} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right) - E_{10} E_{20} \right].$$

$$\cdot \left\{ 4M^2 J_1^2(x) \cos^2 \theta + \left[\left(1 + \frac{M^2}{2} \right) J_0(x) - \frac{M^2}{2} J_2(x) \cos 2\theta \right]^2 \right\}^{1/2} \sin(2\pi\nu_0\tau - \alpha)$$



Фиг. 2.16а

където са въведени следните означения

$$\tan \alpha = \frac{\left(1 + \frac{M^2}{2} \right) J_0(x) - \frac{M^2}{2} J_2(x) \cos 2\theta}{2MJ_1(x) \cos \theta},$$

$$x = 2\pi\Delta v\tau$$

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_3$$

Контрастът на детектирания сигнал, дефиниран като

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

се равнява на

$$V = \frac{\left(\frac{2E_{10}E_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2} \right)}{\left(1 + \frac{M^2}{2} \right)} \left\{ 4M^2 J_1^2(x) \cos^2 \theta + \left[\left(1 + \frac{M^2}{2} \right) J_0(x) - \frac{M^2}{2} J_2(x) \cos 2\theta \right]^2 \right\}^{1/2}$$

При индекс на модулация $M = 0$, говорим за *чиста фазова модулация* и тогава контраста на изходния сигнал е равен на

$$V = \left(\frac{2E_{10}E_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2} \right) |J_0(2\pi\Delta v\tau)|.$$

Както се вижда, и постоянно – токовото ниво и контраста на сигнала са функции от закъснението τ , т.е. от измерваното разстояние.

2.1.6 Метод на виртуалната точка за измерване на напречно отместване на ъглов отражател

Съгласно E.R. Peck (JOSA, **38**, (1948), p. 1015), разликата в оптичните пътища *OPD* между двете рамена на лазерен интерферометър с ъглови отражатели (до първи порядък на зрителното поле θ) е

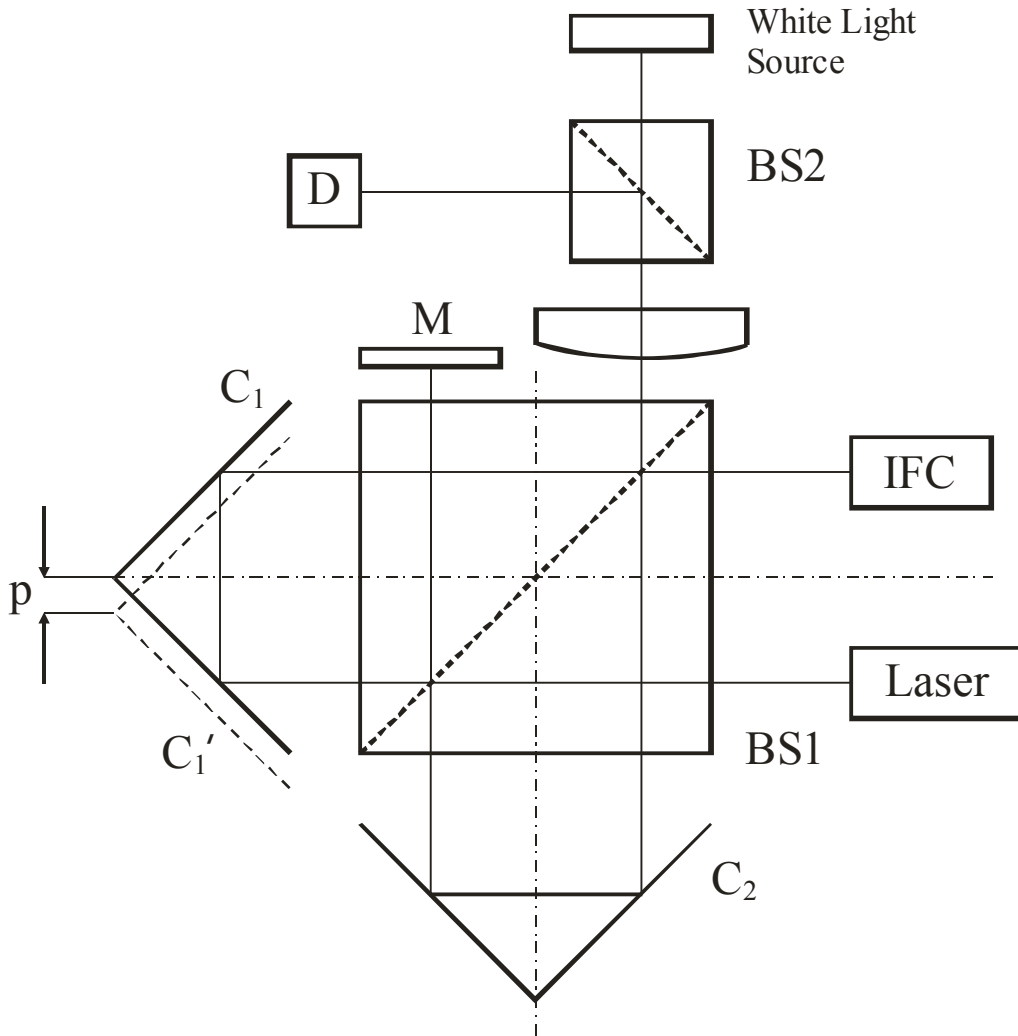
$$q = 2p\theta \cos A \quad /1/$$

където p е напречното отместване, а A е азимуталният ъгъл между равнината, съдържаща лъча и оптичната ос, и равнината, съдържаща двата върха на ъгловия отражател (отсечката p) и оптичната ос.

Нежелателната зависимост $q = q(p)$ може да бъде компенсирана, ако перпендикулярно на снопа бъде вложено плоско огледало. Това твърдение следва от факта, че разликата в пътищата q е пропорционална на $\cos A$, а A се изменя с π след отражението от плоското огледало.

Така полученият интерферометър е с удвоена чувствителност. Но, ако плоското огледало не е строго перпендикулярно на оптичната ос (на снопа, тъй като се предполага, че системата е центрирана), то q няма да бъде равна на нула. Наистина, ако означим с ϕ ъгъла на наклон спрямо оптичната ос и с γ азимуталният ъгъл (дефиниран по същият начин като A) на нормалата към

огледалото, то OPD за един двоен проход през системата ще бъде $OPD = q = 2p2\phi \cos \gamma$ (отново до първи порядък на развитието). Но това означава също, че контраста на ивиците, определен от интегралния енергетичен поток не зависи от размера на източника, така като е при интерферометъра с един



Фиг. 2.16б

проход. Нещо повече, ъгловата грешка ϕ може да бъде сведена до минимум чрез прецизно залепване на огледалото (с оптично лепило) към стената на делителния куб, като по този начин се постига и по-компактна и стабилна механична конструкция.

При интерферометъра с двоен проход, Фиг. 2.16б, ако надлъжното отместване на двата отражателя е много малко, на стойност a , то контраста на ивиците в интегрирания поток, за малък квадратен източник с размер L , е

$$V_d \cong 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{4\pi}{\lambda} a \frac{L}{f} \sin 2\phi \right)^2 + \dots \quad /2/$$

Аналогично, за едно проходен интерферометър той е

$$V_s \cong 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{4\pi}{\lambda} p \frac{L}{f} \right)^2 + \dots \quad /3/$$

Когато двата интерферометъра са настроени за ивици в бяла светлина (a е много малко), сравнявайки (2) и (3), ще установим, че трябва да бъде изпълнено условието

$$p \leq a \sin 2\phi$$

за да бъде контрастът в едно проходния интерферометър също така добър, както и в двупроводния.

Ако в схемата на лазерния интерферометър бъде добавен източник на бяла светлина, то началното положение и движението на оптичния център P на измерителния ъглов отражател може да бъде следено с висока точност.

Ако имаме източник с Гаусово разпределение на спектъра на мощността, центриран около средната стойност λ_0 и с ефективна ширина (до ниво $1/e$ спрямо максимума) $2\Delta\lambda$, системата от ивици за идеален интерферометър се описва с

$$F = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \exp \left[- \left(\frac{\pi a \Delta\lambda}{2\lambda_0} \right)^2 \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda_0} \right) \right] \right\} \quad /4/$$

Вижда се, че достижимата точност за надлъжното отместване a е част от $\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

При оценяване на напречното отместване, ще използваме физическия размер на източника. Нека източникът да има спектрално разпределение на интензитета $I(x, y, \lambda)$ и, аналогично, нека отклика на детектора да се описва с функцията $R(x, y, \lambda)$, където (x, y) са напречните координати в източника или в равнината на детектора. От уравнение (1), нормираният сигнал на изхода от детектора е

$$S = \frac{1}{2} \frac{\int I(x, y, \lambda) R(x, y, \lambda) [1 + \cos(px/f\lambda)] dx dy d\lambda}{\int I(x, y, \lambda) R(x, y, \lambda) dx dy d\lambda} \quad /5/$$

където f е фокусното разстояние на колиматора, разположен пред източника или пред детектора. Като пример, нека предположим, че източника (или детектора) е малки квадрат със страна L и равномерно разпределени свойства по повърхността. Ако напречното отместване p е успоредно на оста x , то можем да разположим равнината на източника (детектора) успоредно на нея.

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \exp\left\{-\left[(\lambda - \lambda_0) / \Delta\lambda_S\right]^2\right\} \\ R(\lambda) &= \exp\left\{-\left[(\lambda - \lambda_0) / \Delta\lambda_D\right]^2\right\} \end{aligned} \quad /6/$$

Тогава уравнение (5) добива вида

$$S = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{2}{\alpha} - \alpha \right) \sin \alpha - 2 \cos \alpha \right] \left(\frac{\Delta\lambda_{eff}}{\lambda_0} \right)^2 + \dots \right\} \quad /7/$$

където $\alpha = (2\pi Lp / f \lambda_0)$, а

$$\left(\frac{1}{\Delta\lambda_{eff}} \right)^2 = \left(\frac{1}{\Delta\lambda_S} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta\lambda_D} \right)^2$$

При малки стойности на отместването p можем за нормираният детектиран сигнал да пишем

$$S = 1 - \frac{4\pi^2}{f^2} \left\langle \left(\frac{x}{\lambda} \right)^2 \right\rangle p^2 \quad /8/$$

където бе въведено означението

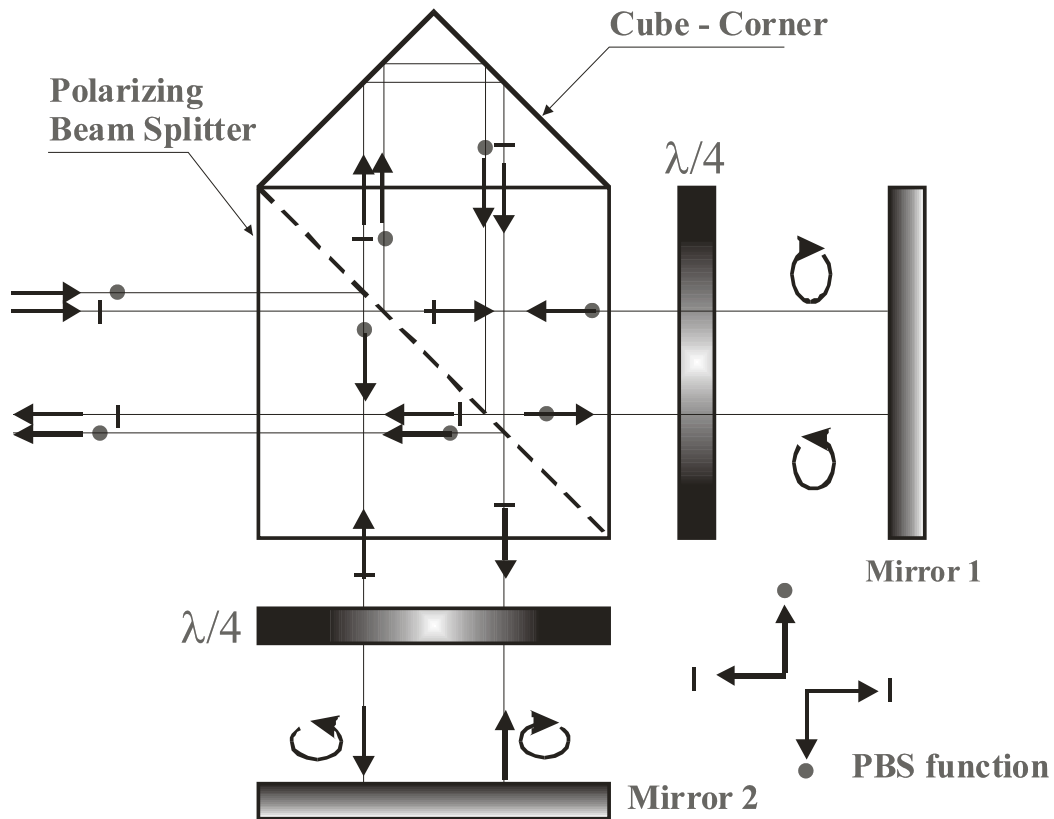
$$\left\langle \left(\frac{x}{\lambda} \right)^2 \right\rangle = \frac{\int I(x, y, \lambda) R(x, y, \lambda) (x/\lambda)^2 dx dy d\lambda}{\int I(x, y, \lambda) R(x, y, \lambda) dx dy d\lambda}.$$

2.1.7 Двупроходен интерферометър на Майкелсон с равнинни крайни огледала

Схемата на този интерферометър е показана на Фиг. 2.16в. Плоски крайни отражатели се използват, когато те трябва да проследяват движението на тяло в посока перпендикулярна на оптичната ос. Типичен пример са дву-координатните X- Y- маси, използвани широко в микроелектрониката и машиностроенето. Обикновено двете крайни огледала формират един правите ъгли на масичката. Те се изработват с много висока точност от един къс стъкло – керамика, която има с нисък коефициент на линейно разширение, и образуват тяло с формата на буква L. Този интерферометър е с удвоена чувствителност. Той работи с двучестотен лазерен източник, който генерира две честоти с ортогонална поляризация.

Задача: а). Опишете аналитично работата на този интерферометър.

б). Интерферометърът ще може ли да работи и как, ако на входа има две кръгови, противоположни поляризации?



Фиг. 2.16в

СЕМИНАР №2

Задача № 1

Координатните равнини в декартовата система ($Oxyz$) са 100% огледални. В първи квадрант попада лъч с косинус-директори (L, M, N). Намерете посоката на изходящия лъч.

Задача № 2

Бипризма на Френел е изработена от стъкло с показател $N = 1,5$ и с ъгъл на клиновете $\alpha = 5^\circ$ ($0,08727 \text{ rad}$). Призмата е разположена по средата между равномерно осветен процеп с ширина $A = 0,01 \text{ mm}$ и екран. Разстоянието между процепа и екрана е 1 m , като техните равнини са перпендикулярни на L . В околността на точка Q наблюдаваме прави, успоредни интерференчни ивици. Изчислете разстоянието между тях и контраста им V . Процепът е равномерно осветен с некохерентен светлинен сноп с дължина на вълната $\lambda = 500 \text{ nm}$.

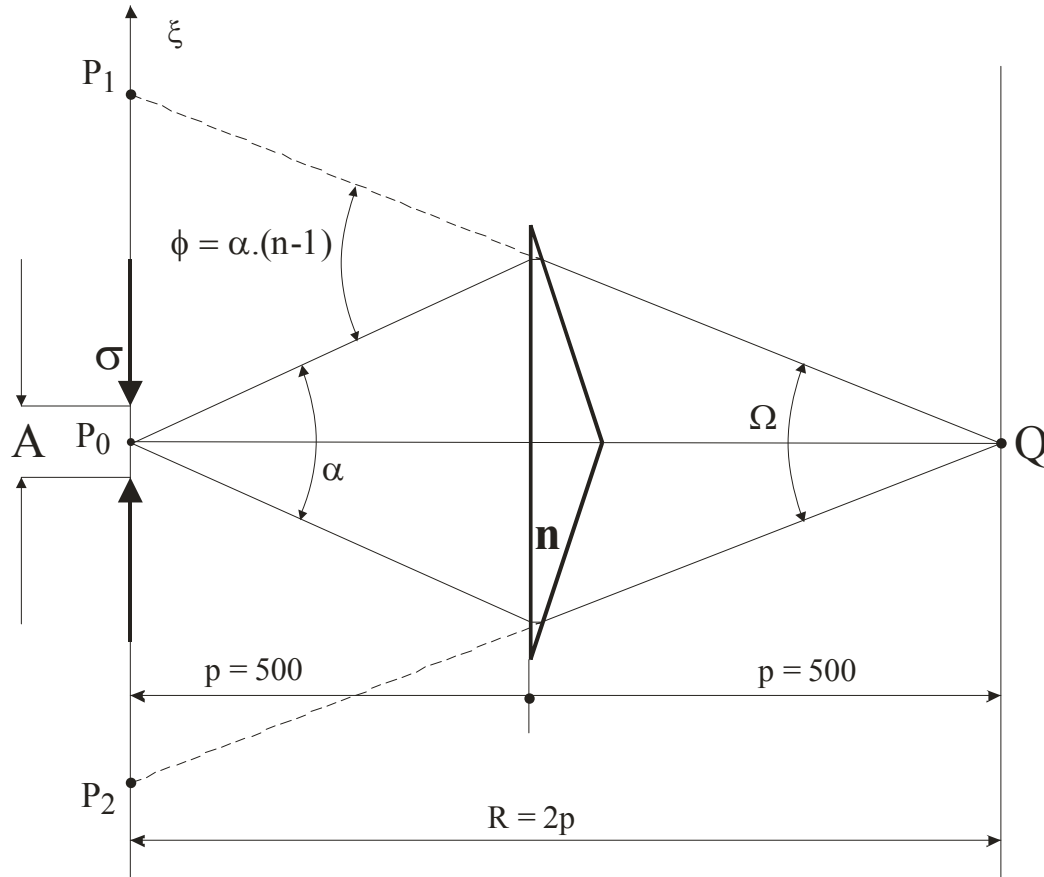
Решение: От Фиг. 2. 17 се вижда, че

$$\varphi = \alpha(N - 1) = \Omega \text{ [rad]}$$

$$e = \frac{\bar{\lambda}}{\Omega} = \frac{\bar{\lambda}}{\alpha(N - 1)} = \frac{0,5}{0,08727(1,5 - 1)} = 11,5 \text{ } \mu\text{m}$$

Тъй като $\tau = 0$, то $V = |\mu_{12}|$ - коефициент на пространствена кохерентност в т. P_1 и P_2 .

$$L_e(\xi) = \text{const.} \Pi\left(\frac{\xi}{A}\right)$$



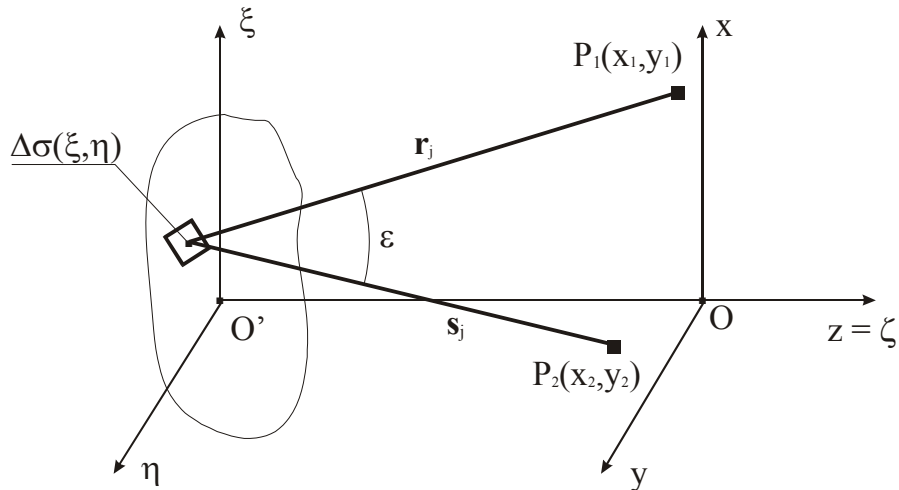
Фиг. 2.17

$$V = |\mu_{12}| = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} L_e(\xi) e^{-i2\pi u \xi} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} L_e(\xi) d\xi} \right| = \frac{1}{A} \left| FT^{-i} \left\{ \Pi\left(\frac{\xi}{A}\right) \right\} \right| = |\text{sinc}(uA)|,$$

където $u = \frac{a}{\lambda}$; $a = \Omega = \phi = \alpha(N-1)$

Пояснение: От теоремата на Ван Цитерт – Цернике (Фиг. 2 18) следва, че

$$\mu_{12} = \frac{1}{\sqrt{I_1} \sqrt{I_2}} \int L_e(\sigma) \frac{e^{i\tau(r-s)}}{rs} d\sigma$$



Фиг. 2.18

$$a = \frac{x_1 - x_2}{R}, \quad b = \frac{y_1 - y_2}{R}, \quad u = \frac{a}{\lambda}, \quad v = \frac{b}{\lambda}$$

$$I_1 = I_2, \quad rs \doteq R^2$$

$$\mu_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} L_e(\xi, \eta) e^{-i2\pi(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} L_e(\xi, \eta) d\xi d\eta}$$

$$uA = \frac{a}{\bar{\lambda}} A = \frac{\alpha(N-1)A}{\bar{\lambda}} = 0,08727 \frac{(1,5-1) \cdot 10}{0,5} = 0,8727$$

$$V = |\text{sinc}(0,8727)| = 0,143 \Rightarrow 14,3\%$$

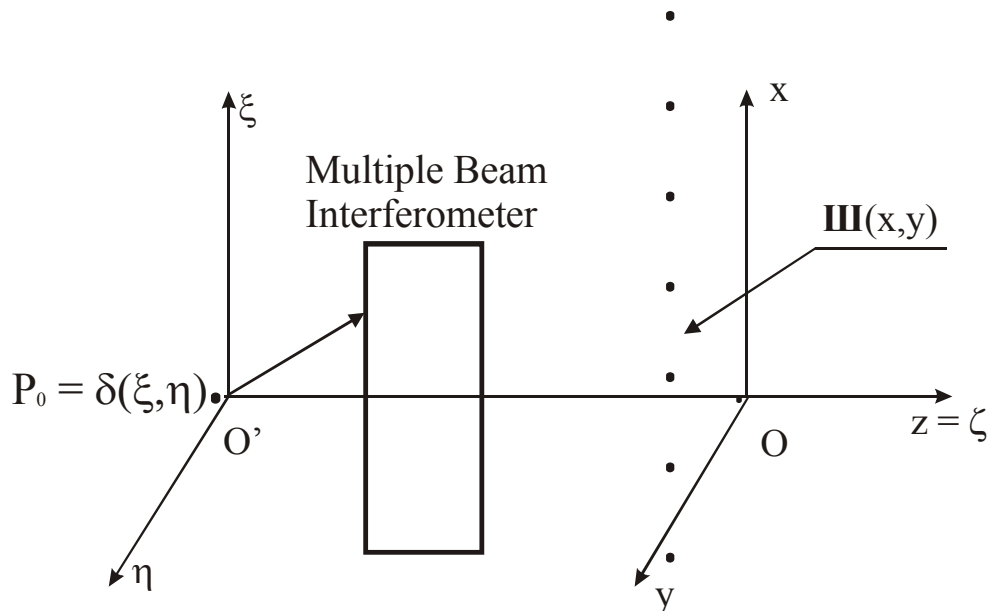
Хронология на развитието на интерферометрите за измерване на премествания

Разделителна способност	Година на постигане	Описание
$\lambda/8$	1965	Комерсиални DC системи
$\lambda/16$	1970	Комерсиални AC системи
$\lambda/512$	1987	20 MHz Хетеродинни системи
$\lambda/2048$	1996	20 MHz Хетеродинни системи

3. МНОГОЛЪЧЕВИ ИНТЕРФЕРОМЕТРИ

3.1. Теоретични бележки

Еквивалентната оптична система на един многолъчев интерферометър дава толкова вторични образа на един първичен точков източник, колкото са интерфериращите снопове. За това всеки параметър на полето (амплитуда или фаза) се задава със серия от стойности, вместо само с по една, както е при двулъчевите интерферометри. Теоретически е възможно да се очаква всяка поредица от стойности (и в природата това се случва), но базово практическо значение има само тази подредба, при която фазите на интерфериращите вилни формират определена математическа поредица, например, ако те са подредени в аритметична прогресия. От обобщения закон за двулъчева интерференция следва, че всяка двойка източници формира една Фурие-компонента на резултантното поле. Фурие-компонентите на полето такъв интерферометър, са последователни хармоници и при горното предположение **те са обикновено във фаза** и с приблизително равни амплитуди. Тяхната сума в далечната зона представлява апаратната функция на интерферометъра и се апроксимира с **Dirac comb**.



Фиг. 3.1

Това, в известно приближение, означава, че многолъчевите интерферометри дават сигнал за директно отчитане на пространственото и на спектралното разпределение на източника, а не на техните *Fourier* образи, както е при двулъчевите интерферометри. Впрочем, това е и основната разлика между двулъчевите и многолъчевите интерферометри.

Сигналът на изхода от многолъчев интерферометър се повтаря с периода на **Dirac comb**, следователно, този сигнал притежава серия от “остри” интерференчни порядъци.

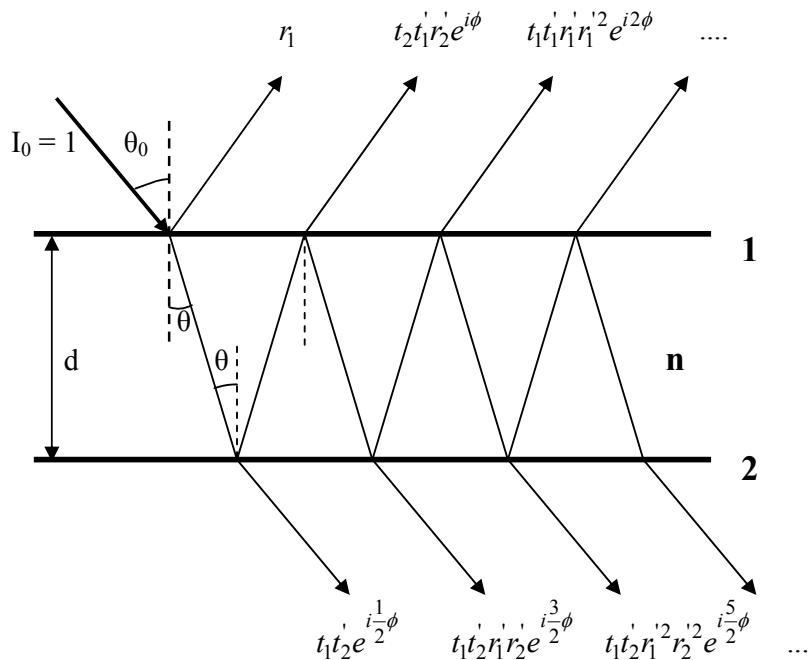
С профилът на **Dirac comb** може да бъде описан единствено сигнала на изхода от идеален инструмент. Общият модел, с който се описва всеки реален

многолъчев интерферометър, би следвало да отчита влиянието на редица допълнителни фактори. Този модел се дава с конволюцията

$$k(\Psi) = \left[\text{III} \left(\frac{\Psi}{2\pi} \right) * a(\Psi) \right] \cdot b(\Psi),$$

където всеки пик, представен от **Dirac comb** $\text{III} \left(\frac{\Psi}{2\pi} \right)$, е уширен от конволюцията с функцията $a(\Psi)$, описваща профила на отделния порядък, а от своя страна, серията от порядъци не са с константна височина, а се различават помежду си според вида на функцията $b(\Psi)$.

3.2. Класически модел на многолъчев интерферометър



Фиг. 3.2

Равнинна, монохроматична вълна пада под ъгъл θ_0 върху първото чело на планпаралелна пластина, изработена от материал с показател на пречупване n . Нека означим с

r, t комплексните амплитудни коефициенти на отражение и пропускане, съответно, за вълни разпространяващи се в посока от околната среда към средата с показател на пречупване n ;

r', t' същите коефициенти, но за вълни разпространяващи се в посока от средата с показател на пречупване n към околната среда.

Комплексната амплитуда на m на брой преминали вълни, съгласно принципа на суперпозиция, ще бъде:

$$U_{im} = e^{\frac{1}{2}i\phi} \left[t_1 t_2' + t_1 t_2' r_1' r_2' e^{i\phi} + t_1 t_2' r_1'^2 r_2'^2 e^{2i\phi} + \dots + t_1 t_2' r_1'^{(m-1)} r_2'^{(m-1)} e^{i(m-1)\phi} \right] =$$

$$= \frac{t_1 t_2' (1 - r_1'^m r_2'^m e^{im\phi})}{1 - r_1' r_2' e^{i\phi}} \cdot e^{\frac{1}{2}i\phi}$$

където

$$\phi = 4\pi\nu \frac{nd}{c} \cos\theta = 2\pi\nu T \cos\theta$$

$$T = \frac{2nd}{c} \text{ е времето за един двоен преход през средата с показател на}$$

пречупване n и дебелина d .

В идеалният случай, когато броят на интерфериращите вълни, клони към безкрайност, $m \rightarrow \infty$, комплексната амплитуда на резултантното преминало поле ще клони към:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} U_{im} = U_t = \frac{\tau}{1 - R e^{i\psi}}$$

$$\tau = |t_1 t_2'|, \quad R = |r_1' r_2'|, \quad \psi = \phi + \chi$$

където

$$\chi = \arg(r_1') + \arg(r_2')$$

Тази величина е много често пренебрегвана при общите разглеждания, но в действителност оказва силно влияние върху вида и стойността на изходния сигнал.

Интензитетът на преминалото поле се описва с функцията на Ейри (Airy, 1833); която се дефинира като

$$A(\psi) = \frac{I}{I_0}$$

Ако въведем и сумарното поглъщане A в двата слоя, то функцията на Ейри за отразеното поле ще бъде:

$$A_T(\psi) = \frac{\tau^2}{1 - 2R \cos\psi + R^2} = \left(1 - \frac{A}{1 - R}\right)^2 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1 - R)^2 \sin^2 \psi/2}}$$

Подобно, за комплексната амплитуда и интензитетът на сумарното отразено поле получаваме при $m \rightarrow \infty$:

$$U_r = r_1 + t_1 t_1' r_2' e^{i\phi} + \dots = r_1 + \frac{t_1 t_1' r_2' e^{i\phi}}{1 - r_1' r_2' e^{i\phi}}$$

$$A_R(\psi) = \frac{Q \cdot \sin^2(\psi/2)}{1 + Q \cdot \sin^2(\psi/2)}$$

Дали е възможно така изведената форма за функцията на Ейри да бъде представена като конволюция на **Dirac comb** с една непериодична функция. За целта нека представим $A(\psi)$ като квадрат на сумата, изразяваща амплитудата на резултантното поле. Също, нека въведем означението за порядъка на интерференция $N = \psi/2\pi$, при $\theta \rightarrow 0$ и $N = \nu T$. Тогава

$$A(N) = \frac{\tau^2}{1-R^2} (1 + 2R \cos 2\pi N + 2R^2 \cos 4\pi N + \dots)$$

Фурие преобразуването е предавателната функция на интерферометъра. Тъй като:

$$\cos 2\pi nN \xrightarrow{FT} = \frac{1}{2} [\delta(u-n) + \delta(u+n)],$$

то предавателната функция може да се запише като:

$$A(u) = \frac{\tau^2}{1-R^2} III(u) \cdot R^{|u|}; \quad u = \tau/T,$$

И обратното преобразуване дава:

$$A(\psi) = \frac{\tau^2}{1-R^2} III(\psi/2\pi) * \frac{2\rho}{\rho^2 + \psi^2},$$

където $\rho = \ln R$ (Piere Connes, 1961).

Непериодичната функция, с която се описва профила на една ивица (на един порядък) е лоренциана

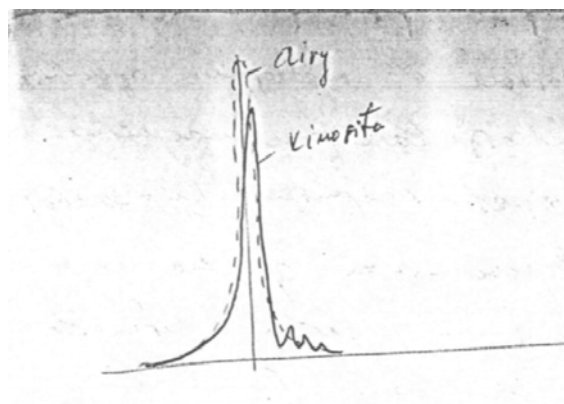
$$S(\psi) = \frac{\tau^2}{1-R^2} \frac{2\rho}{\rho^2 + \psi^2}.$$

В литературата се срещат и други представяния (математически модели) на многолъчев интерферометър.

Разпределението на интензитета, дадено от функцията на Ейри важи само при идеално успоредни повърхнини на огледалата. Kinoshita (1953) е изследвал влиянието на малки непаралелности на огледалата. Той е демонстрирал нарушаването на строгата симетрия в идеалния профил на ивиците при многолъчева интерференция. Профилът се измества встрани и се появяват паразитни осцилации в основата на склоновете на всяка ивица. През 1955 г. Tolansky дава следното условие за добра валидност на описаният по-горе модел :

$$T \ll 3/(4\nu\theta^2 m^3),$$

където параметърът m е обикновено от порядъка на 60.



Фиг. 3.3 Изследването на Киносита.

Допълнение: Извеждане на модела на Пиер Кон

$$\begin{aligned}
 & U.e^{2i\phi} \cdot [\bar{\tau} + \bar{\tau}.R.e^{i\phi} + \bar{\tau}.R^2.e^{2i\phi} + \bar{\tau}.R^3.e^{3i\phi} + \dots] \Rightarrow I = U.U^* \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \tau^2 \cdot [1 + R.e^{i\phi} + R^2.e^{2i\phi} + R^3.e^{3i\phi} + \dots] \cdot [1 + R.e^{-i\phi} + R^2.e^{-2i\phi} + R^3.e^{-3i\phi} + \dots] \\
 & [1 + R.e^{i\phi} + R^2.e^{2i\phi} + R^3.e^{3i\phi} + R^4.e^{4i\phi} + \dots] + \\
 & + [R.e^{-i\phi} + R^2 + R^3.e^{i\phi} + R^4.e^{2i\phi} + R^5.e^{3i\phi} + \dots] + \\
 & + [R^2.e^{-2i\phi} + R^3.e^{-i\phi} + R^4 + R^5.e^{i\phi} + R^6.e^{2i\phi} + \dots] + \\
 & + [R^3.e^{-3i\phi} + R^4.e^{-2i\phi} + R^5.e^{-i\phi} + R^6 + R^7.e^{i\phi} + \dots] + \\
 & = [1 + R^2 + R^4 + R^6 + \dots] + \\
 & + [2R \cos \phi + 2R^3 \cos \phi + 2R^5 \cos \phi + 2R^7 \cos \phi + \dots] + \rightarrow \frac{1}{1-q^2} \\
 & + [2R^2 \cos 2\phi + 2R^4 \cos 2\phi + 2R^6 \cos 2\phi + \dots] + \\
 & + [2R^3 \cos 3\phi + 2R^5 \cos 3\phi + 2R^7 \cos 3\phi + \dots] + \dots \\
 & = [1 + R^2 + R^4 + R^6 + \dots] + \\
 & + [1 + R^2 + R^4 + R^6 + \dots] 2R \cos 2\phi + \\
 & + [1 + R^2 + R^4 + R^6 + \dots] 2R^2 \cos 2\phi + \dots \\
 & + [1 + R^2 + R^4 + R^6 + \dots] 2R^3 \cos 3\phi + \dots \\
 & = \frac{\tau^2}{1-R^2} [1 + 2R \cos \phi + 2R^2 \cos 2\phi + 2R^3 \cos 3\phi + 2R^4 \cos 3\phi + \dots]
 \end{aligned}$$

3.3 Финес на ивиците.

Дефиниция: Финес (или остротата) на интерференчните ивици F се нарича отношението между периода на ивиците $\Delta\Psi$ към полуширината на отделната ивица $\delta\Psi$, и се бележи с :

$$F = \frac{\Delta\Psi}{\delta\Psi} = \frac{\pi R^{1/2}}{1-R} = \frac{\pi\sqrt{Q}}{2},$$

където периодът на ивиците при многолъчева интерференция е $\Delta\Psi = 2\pi$.

3.4 Обобщен модел на многолъчев интерферометър. Модел на Хернандез

През 1966 г. *Hernandez* предлага едно по-пълното описание на F.P. интерферометъра, предназначен за спектрални цели:

$$A = B * I,$$

където B е функция, описваща източника,

I е инструменталната функция (наричана още апаратна функция или импулсен отклик на уреда).

В разгъната форма този модел има вида:

$$A = \underbrace{L * G}_{B} * \underbrace{a * D_f * D_g}_{I} * F ,$$

където L – е лоренциан, G – доплеровия профил; a – апаратната функция (импулсния отклик) на идеалният уред (има вида на Дираков гребен); D_f – отразява влиянието на макро топографията (деформацията, вълнистост) на работните оптични повърхности, D_g – отразява влиянието на микро-топографията на оптичните повърхности (микроскопичните деформации, награвеност), F – описва влиянието на апаратурата.

Функциите D_f и D_g изразяват фазовите изкривявания в зависимост от дефектите на повърхностите и нееднородностите на диелектричната среда между огледалата. За приблизителна оценка на това влияние се използва следната формула: финесът $F = m/2$, където дефектите са с амплитуда λ/m .



Фиг. 3.4

Понастоящем се изработват огледала с точност на взаимно съгласуване на работните повърхности $\lambda/100 \div \lambda/200$ (не са редки предложения като $\lambda/500$ и дори повече). Но за пълното оползотворяване на тази точност е необходима и адекватна техника за нанасяне на отражателното покритие. Многослойно диелектрично отражателно покритие (с брой на слоевете $m = 30 \div 60$), което би запазило повърхностната форма се нанася само при много специални условия. Интерферометрите на *Fabry-Perot* от нисък и среден клас имат финес $F = 30 \div 50$. При тях само за големи дължини на вълната λ или при малки апертури на снопа могат да се получат по високи стойности на F .

3.5 Области на приложение на многолъчевите интерферометри

Изходния сигнал от един многолъчев интерферометър е функция от фазата

$$\psi = 4\pi\nu \frac{nd}{c} \cos \theta ,$$

която от своя страна е също функция и то на серия от параметри. Всеки от тях може да се изменя в хода на един физичен процес. Обикновено, целта на всяко измерване е то да бъде така организирано, че да варира само този параметър, който е във функционална връзка с измерваната величина, а всички останали (паразитни) параметри да са константни. Евентуалните (но неизбежни) вариации на “паразитните” параметри водят до появата на грешки.

1. За спектрални изследвания:

$$\psi = K\nu$$

$$K = 4\pi \frac{nd}{c} \cos \theta = \text{const.}$$

При тези измервания само ν е променлива.

2. За изследване на фазови обекти:

$$\psi = K(nd)$$

$$K = 4\pi \frac{\nu}{c} \cos \theta = \text{const.}$$

При това измерване променливата величина е оптичният път nd . Прилага се

- При диагностиката на плазма;
- При изследване на топлинни полета;
- При изследване на аеродинамични явления;
- За измерване на напрежения в прозрачни модели.

3. За измерване на малки разстояния (премествания):

$$\psi = Kd$$

$$K = 4\pi \frac{\nu n}{c} \cos \theta = \text{const.}$$

Тук променливата величина е разстоянието d . Използва се при:

1. контрол на оптични повърхнини по време или след приключване на технологичните операции;
2. измерване на вибрации и премествания с малка амплитуда. Например, за геофизични изследвания, за сеизмологични измервания и др. Като пример, в края на тази глава е показана една такава конструкция.

3.6 Особености в конструкцията на многолъчевите интерферометри

Основни изисквания към многолъчевите интерферометри, предназначени за изследване на някаква среда, разположена между огледалата:

1. Конструкцията трябва да позволява разполагането на изследваните обекти в пространството между огледалата. При това, обектът не трябва да изменя оптичните свойства на покритията (обърнете внимание на влиянието на χ върху формата на сигнала).
2. Конструкцията трябва да предвижда механизъм за точно преместване на едното огледало спрямо второто – това е обусловено от факта, че чувствителността на интерферометъра е силно зависима от настройката.

Както видяхме, разпределението на интензитета в интерференчната картина се описва с функцията $A = A(\psi)$,

$$\psi = 4\pi\nu \frac{nd}{c} \cos \theta + \chi.$$

Формата на профила на интерференчните ивици се определя от R и d и качеството на оптичните повърхности. Съгласно приведените зависимости финеса на ивиците е:

$$\mathfrak{F} = \frac{m}{c} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \text{ или}$$
$$\Delta h = \frac{\lambda}{m}; m = \frac{2\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

Като заместим получаваме за деформацията на оптичните повърхности

$$\Delta h = \frac{\lambda(1-R)}{2\pi\sqrt{R}} .$$

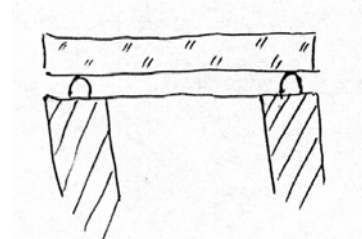
Логично е да се очаква, че R е във функционална зависимост от интегралната точност на оптичните повърхности:

$$\left(\frac{\Delta h}{\lambda}\right)^{-1} = m = 2F$$

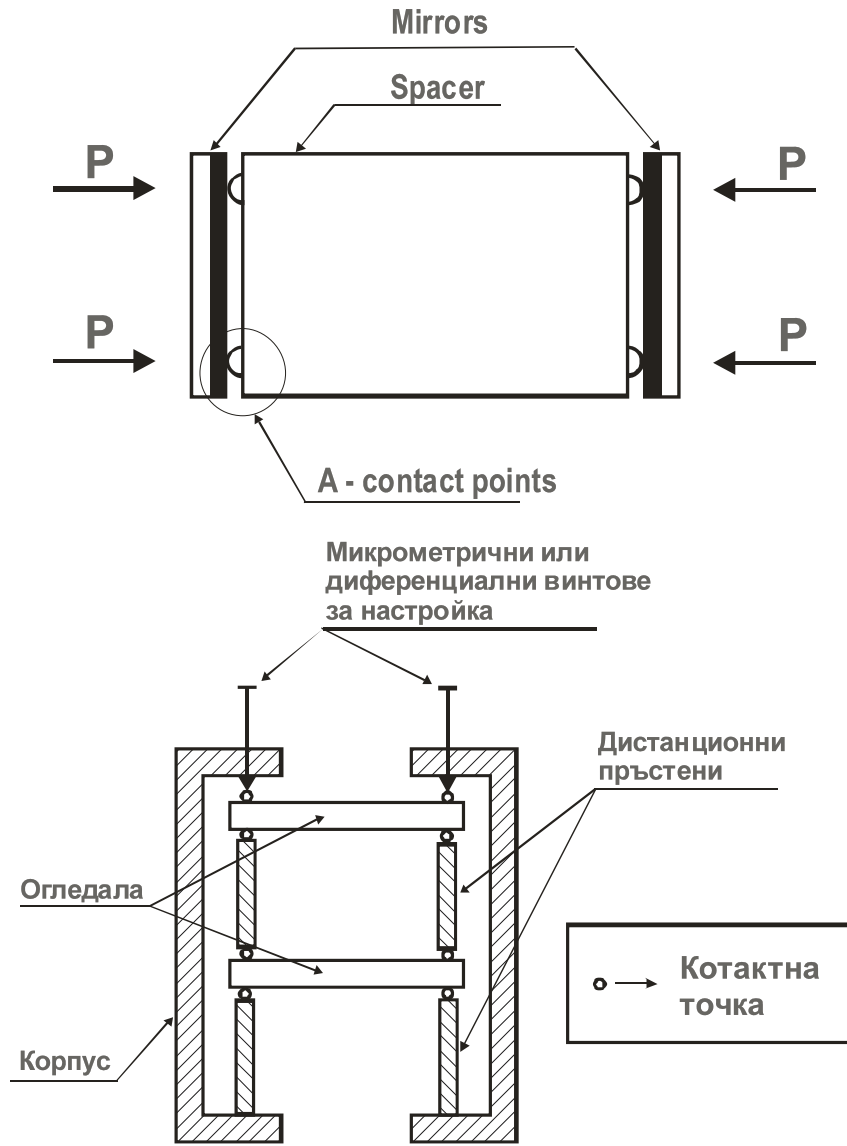
Механичната конструкция на многолъчевите интерферометъри се реализира по няколко основни схеми:

1. Затворен интерферометър - Фиг. 3.5.

При тази конструкция разстоянието между огледалата се поддържа от дистанционен пръстен, който е от материал с малък коефициент на температурно разширение (напр. инвар, суперинвар, топен кварц, специални материали, като стъкло-керамика ZERODUR и др.). Контактът между огледалните повърхности и дистанционния пръстен се гарантира от външна сила усилие P , която се прилага от механичната конструкция. В точките на контакт, означени с A , възникват области на високи концентрации на механични напрежения. Те се поддават на частично количествено описание с теорията на Херц за механичния контакт. Стойността на тези напрежения често



пъти надхвърля границата на еластичност на материала. В резултат, възникват пластични деформации, които водят до износване или до локални разрушения на материала.

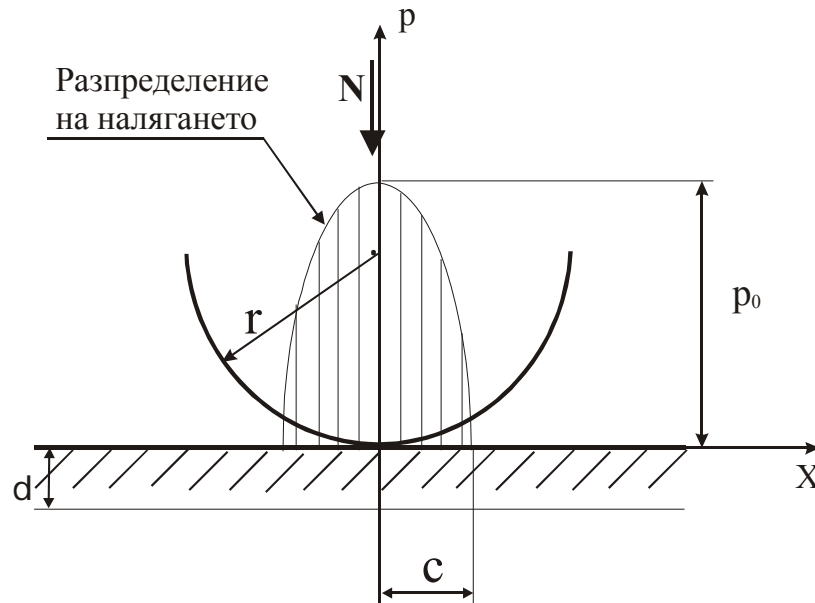


Фиг. 3.5

Допълнение: Съгласно теорията на Херц за механичния контакт между две тела, например, сфера с радиус r и равнина, притиснати с нормална сила N , разпределението на нормалното налягане p се описва с ротационния елипсоид:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{c}\right)^2 = 1$$

$$c = \left[\frac{3}{4} N \cdot \varepsilon \cdot r\right]^{1/3}$$



където N е нормалната сила, а ϵ е константа, зависи от комбинацията на двата материала.



Величината d е общата деформация на двете тела. Нейната стойност е $d=[c^2/r^3]$ и не трябва да надхвърля границата на еластичната деформация.

Максималното налягане е

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{N}{\pi \cdot c^2}$$

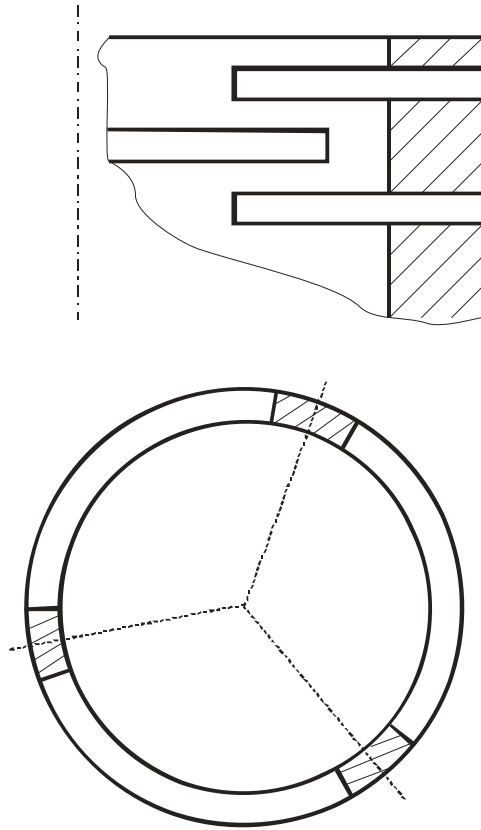
Стойността на константата ϵ зависи основно от материалите, които контактуват. Така например за комбинациите:

Ахат - стомана (или инвар)	$\epsilon = 1,77$ [m^2N];
Берилиев бронз - стомана (или инвар)	$\epsilon = 1,15$ [m^2N];
Корунд - стомана (или инвар)	$\epsilon = 0,66$ [m^2N].

Изчисленията по теорията на Херц дават само ориентировъчни стойности. Точната ситуация се определя с измерване върху серия от образци.

2. Затворена конструкция с еластични дистанционни пръстени

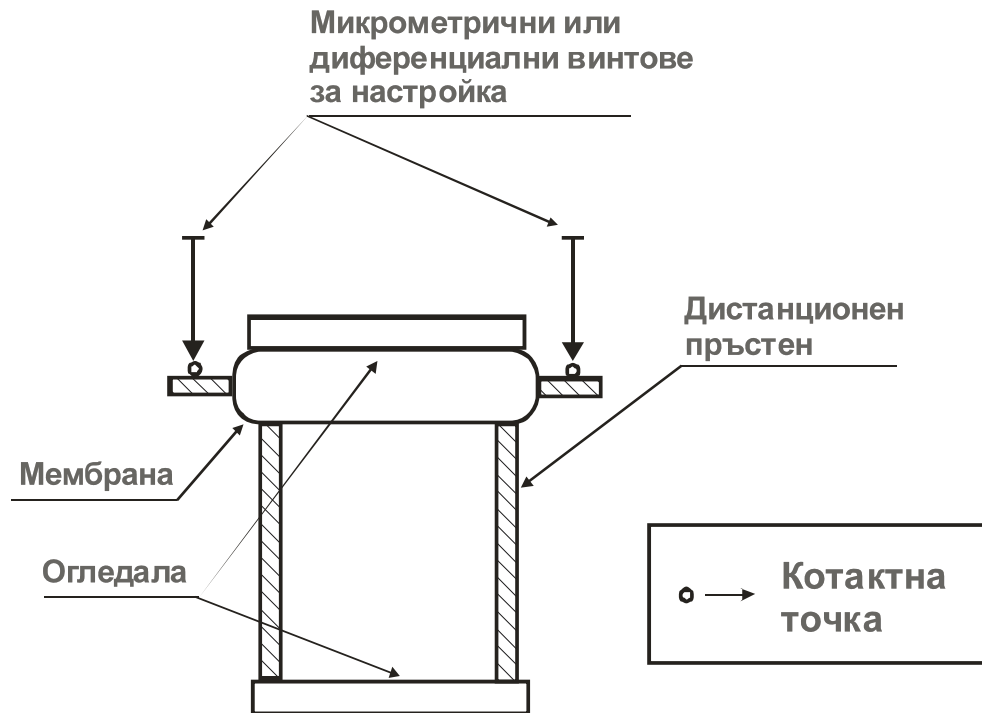
Тази конструкция е принципно идентична с предишната. Тялото на корпуса, както и дистанционните пръстени са от инвар, суперинвар или (по-рядко) от топен кварц или стъкло керамика. Средният пръстен може да бъде еластичен, с радиални прорези, по три, ориентирани под 120° , във всеки слой на срязване:



Контактните точки върху средния пръстен отново трябва да бъдат съответно ориентирани.

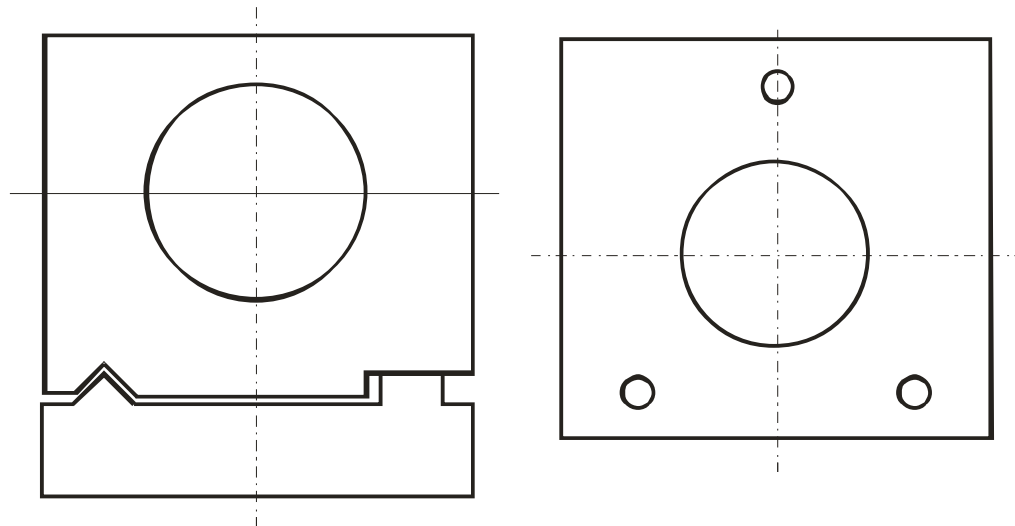
3. Затворена конструкция с едностранна настройка

Основният елемент е сферична става, съставена от масивен среден пръстен (от стомана или топен кварц) и двойка еластични мембрани. Към едната мембрана е заварен дистанционният пръстен на интерферометъра, а към втората – едното от огледалата. При тази конструкция едното огледало е неподвижно, а второто се настройва с микрометрични или диференциални винтове в три точки върху периферията на средния пръстен.



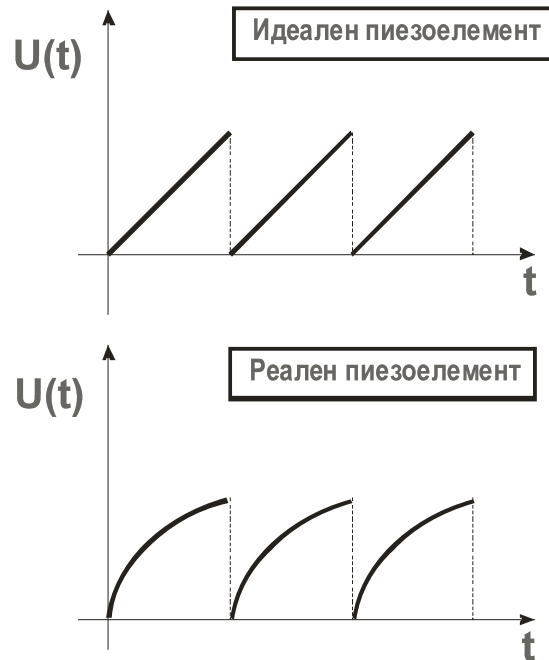
3. Отворен интерферометър

Този уред е изграден на принципа на оптичката скамейка. Основен механичен елемент е водещата релса, върху която се придвижват двата носача (конници) на огледала. Релсата може да бъде реализирана по различен начин. Най-често тя е едностранна, профилирана, или съставена от три калибрирани по диаметър цилиндъра, разположени под 120° .



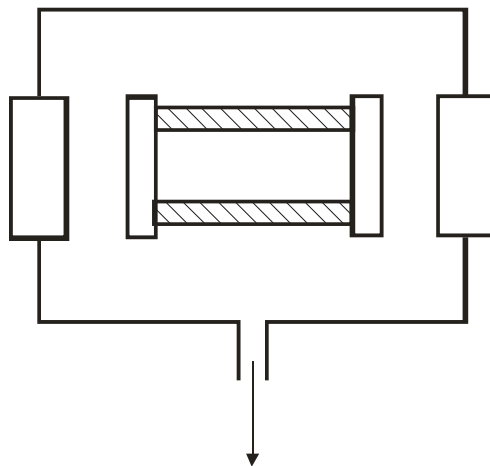
В сканиращите *Fabry – Perot* интерферометри второто (настроеваемото) огледало се монтира върху три стълбчета от пиезокерамични преобразуватели. Тъй като тези преобразуватели са силно нелинейни, генераторите на линейно

възбуждащото напрежение се проектират така, че да коригират тази нелинейност чрез нелинейната форма на възбуждащото напрежение.



4. Интерферометри за изследване на газове

Тяхната конструкция в действителност представлява малка барокамера, в която са предвидени специални преходни механизми за настройка на огледалата.



3.7 Методи за регистрация на интерферометрична картина

1. Класическият метод за регистрация на оптични сигнали е фотографията. Днес тя се използва значително по-рядко. Фото-регистрацията се прилага при:

- бавно протичащи процеси. В този случай не се налага използването на специална техника. Изискванията към процеса се определят от естеството на измерването.

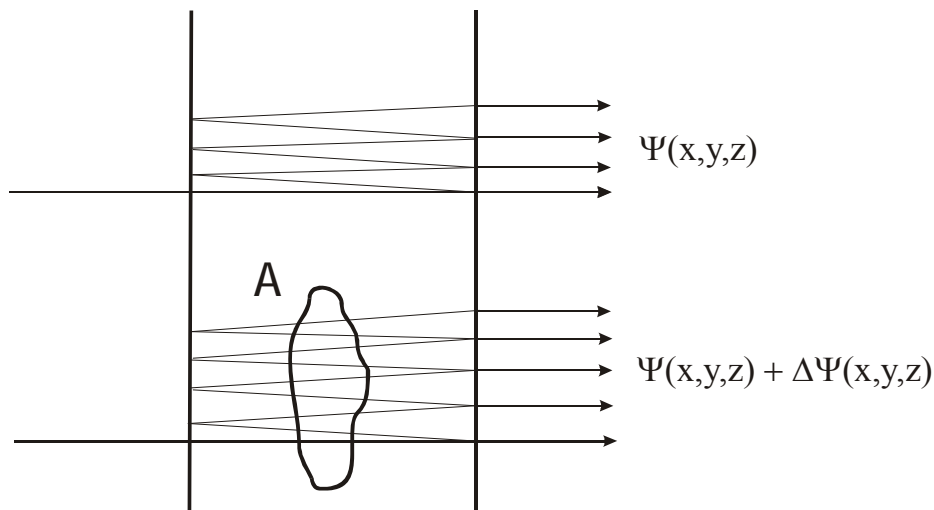
- бързо протичащи се явления. За целта най-често се използва специална фото техника, като скоростни (до около 20000 кадъра/сек.) и свръх-скоростни (до няколко милиона кадъра за секунда) кинокамери, специални източници на светлина (поради много кратките времена на експозиция) и подходящи схеми за синхронизация.

Важна особеност на този метод е задължителното изискването за работа в линейната част на кривата на почерняване (*Herter – Drifield* -ова крива) на фотоматериала, поради необходимостта от фотометриране на части от ивиците. Това налага строга преценка на експозицията. По тази причина често пъти се налага да се използват *ЕОП* (електро-оптични преобразуватели на образа).

2. Днес най-често използвания метод за регистрация на оптични сигнали е електронното фотометриране.

3.8. Чувствителност на интерферометъра при измерване на малки разлики във фазата

Редно е да си зададем следния въпрос: колко е най-малкото фазово отместване, (или най-малката оптическа плътност на един фазов обект *A*), което все още сме в състояние да регистрираме? Способността на уреда да реагира на малки промени на входната величина се нарича **чувствителност**.



Чувствителността на един интерферометър се дефинира като:

$$M = \frac{1}{I_{\max}} \left| \frac{dI}{d\Psi} \right|$$

където

$$A(\Psi) = \left(1 - \frac{A}{1-R}\right) \frac{1}{1 + Q \sin^2\left(\frac{U}{2}\right)}, \quad Q = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

Да направим едно сравнение с двулъчевите интерферометри като измерването нека бъде в околността на точката $I = I_{\max} / 2$.

При многолъчевите интерферометри чувствителността в околността на така избраната точка върху контура на ивицата е

$$M = \frac{\sqrt{R}}{2(1-R)} = \frac{F}{2\pi},$$

докато за двулъчевите интерферометри, в околността на същата точка, тя е $M = 0.5$. Следователно, многолъчевите интерферометри са способни да различават $(F/2\pi)$ - пъти по-малки фазови изменения, в сравнение с двулъчевите, при еднаква точност на измерване на интензитета на полето.

В най-общия случай, в една произволна точка $(I/I_{\max}) = 1/q$ върху контура на ивицата, чувствителността е:

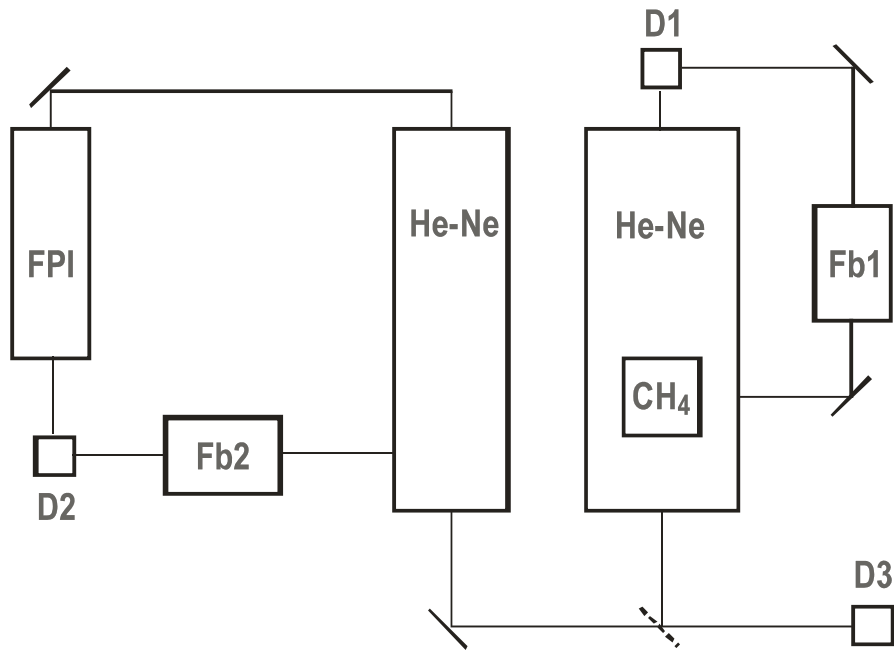
$$M = \frac{\sqrt{R}}{1-R} \frac{2\sqrt{q-1}}{q^2} = \frac{F}{\pi} \frac{2\sqrt{q-1}}{q^2}.$$

Следователно, **чувствителността M** (при постоянно R) **зависи** от мястото на точката на измерване върху контура на ивицата, т.е. **от настройката на интерферометъра.**

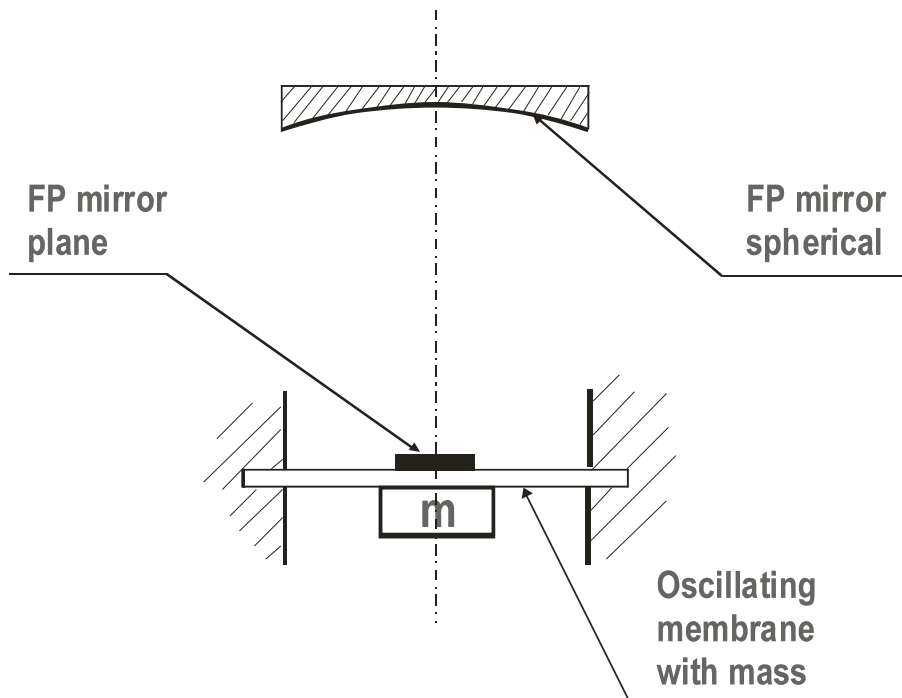
3.9. Лазерен гравиметър с честотна стабилизация

Този уред позволява да се регистрират гравитационни приливи от порядъка на μgal [10^{-6}cm.s^{-2}]. За разлика от уредите с махало или на тези, които се базират на свободно падане на тяло, този уред е преносим. Прилага се за прецизни измервания на ускорения и на промени в гравитационното поле.

Схемата на уреда е показана на Фиг. 3.6. Лазерният източник $L1$ е честотно-стабилизиран $He-Ne$ лазер с метанова клетка. Едното от огледалата на лазера $L1$ е неподвижно, а другото се управлява с пиезоелемент. Чрез приемника $D1$ и обратната връзка $Fb1$, като се следи първата производна на сигнала, се регулират колебанията на огледалото по един от склоновете на линията на поглъщане на метана. Лазерът $L2$ е без метанова клетка, но честотата му се синхронизира с тази на $L1$ чрез следене на определена интерференчна ивица на Фабри-Перо интерферометъра FPI с помощта на приемника $D2$ и обратната връзка $Fb2$ (отново по първата производна на сигнала). Двата сигнала, от $L1$ и $L2$, се наслагват и детектора $D3$ регистрира биенето между честотата на базовия лазер $L1$ и синхронизирания лазер $L2$. Честотата на биене е пропорционална на деформацията на мембраната, носеща плоското огледало на интерферометъра.



The Fabry Perot Interferometer



Фиг. 3.6

СЕМИНАР №3

Поляризацияното състояние на монохроматично поле се описва най-добре с помощта на матриците на Джонс.

Да разгледаме поле с електричен вектор \mathbf{E} , с посока на разпространение съвпадаща с оста z . Векторът на Джонс (Максвел) се дефинира като:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}.$$

Азимуталните ъгли се измерват в посока от $+x$ към $+y$, а посоката на елиптична или кръгова поляризация е положителна, ако за наблюдател, гледащ в “забранената посока”, т.е. към източника, електричният вектор се завърта обратно на часовниковата стрелка (от $+x$ към $+y$). Например, линейна поляризация под ъгъл $+45^\circ$ се описва с вектора на Джонс

$$E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

а дясната кръгова поляризация с вектора

$$E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Интензитета на снопа се представя чрез вектора на Джонс като:

$$I = \frac{1}{2} \langle E_x^* E_x + E_y^* E_y \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E}^+ \cdot \mathbf{E}.$$

Влиянието на оптичния елемент върху падащото поле се описва с умножението на неговия вектор с матрицата, характеризираща елемента. Например, двулъчепречупваща пластинка, ориентирана с бърза ос по x , се явява за светлината като по-дебела за компонентата по оста y и като по-тънка за тази по оста x . Изходящата y -компонента закъснява фазово спрямо x -компонента с γ . Матрицата на Джонс, описваща този процес (т.е. матричния оператор на фазовата пластина или на фазовия закъснител – *retarder*) е:

$$\mathbf{R}(\gamma) = \begin{bmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{bmatrix}.$$

Ако фазовата пластинка е завъртяна на ъгъл θ , то вектора на Джонс на изходящата вълна \mathbf{J}' е:

$$\mathbf{J}' = \mathbf{S}(-\theta) \cdot \mathbf{R}(\gamma) \cdot \mathbf{S}(\theta) \cdot \mathbf{J},$$

където операторът

$$S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

е матрицата на ротация на ъгъл θ .

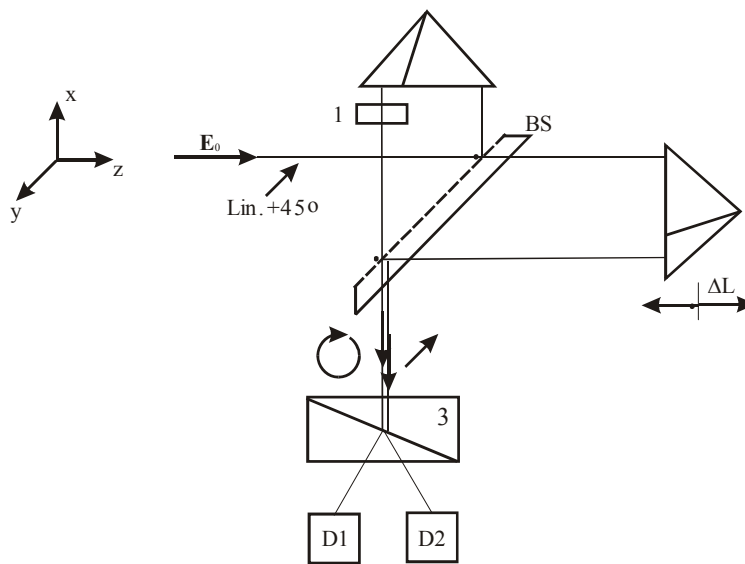
Друг важен фазов елемент са огледалата. За отразяваща повърхност с нормала в равнината xz , матрицата има вида:

$$M = \begin{bmatrix} r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix},$$

където r_p, r_s са комплексните амплитудни коефициенти на Френел.

Важно допълнение: При отражение се изменя знака само на координатната ос z . Следователно, при отражение без изменение на поляризацията (без фазово отместване между основните компоненти p и s), входна линейната поляризация под ъгъл φ след отражението остава пак линейна, но под ъгъл $(-\varphi)$.

Пример:



В горната схема с 1 е означена фазова пластина $\lambda/4$ с вертикална главна ос. Входната поляризация е линейна с азимут $+45^\circ$. Воластоновата призма 3 е линеен поляризатор с два симултанни оператора на Джонс:

за хоризонтална компонента $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

и за вертикалната компонента $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Светоделителят е с покритие от страната на лазерният източник и е несиметричен. Опорното рамо на интерферометъра лежи в равнината xz .

Светоделителят се описва с две матрици на отражение:

$$\begin{bmatrix} R_p e^{ir/2} & 0 \\ 0 & R_s e^{-ir/2} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} R'_p e^{ir/2} & 0 \\ 0 & R'_s e^{-ir/2} \end{bmatrix},$$

съответно в посока от лазера и в обратна посока.

Ако предположим, че подложката на светоделителя не внася фазово отместване, то неговите оператори на пропускане ще бъдат:

$$\begin{bmatrix} T_p & 0 \\ 0 & T_s \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} T'_p & 0 \\ 0 & T'_s \end{bmatrix}$$

Като отражатели ще изберем призмени диедри с нормали, лежащи в равнината хz. Тогава матрицата за всяко отражение е диагонална:

$$\begin{bmatrix} r_p e^{iy/2} & 0 \\ 0 & r_s e^{-iy/2} \end{bmatrix}$$

двойното отражение възстановява първоначалната система от координати.

Интензитетите на изхода за поляризиациите под 0° и 90° (отговарящи на о- и е- вълните на призмата на Воластон) са съответно:

$$\frac{1}{2} r_p^4 T_p^2 \left[(tR'_p)^2 + R_p^2 + 2tR'_p R_p \cos \left(\eta + \frac{\Gamma - \Gamma'}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

и

$$\frac{1}{2} r_s^4 T_s^4 \left[(tR'_s)^2 + R_s^2 + 2tR'_s R_s \cos \left(\eta + \frac{\Gamma - \Gamma'}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Двата сигнала са отместени по фаза на $\pi/2$ – т.е те са в квадратура.

4. ДРУГИ ВИДОВЕ ИНТЕРФЕРОМЕТРИ

Към настоящият момент съществува богато разнообразие от конструкции на интерферометри. Някои от тях се различават съществено от дотук изброените и нека разгледаме онези, които са намерили широко приложение в техниката. Към тях можем да отнесем:

- интерферометрите с дифракционната решетка;
- поляризационните интерферометри;
- интерферометрите с автокомпенсация.

4.1. Интерферометри с дифракционна решетка (интерферометри на Рончи)

Една дифракционна решетка може да бъде използвана като светоделител. С нея може да се замени полупрозрачното огледало в някоя от класическите конструкции или да се реализира схема на ъглов шийринг интерферометър.

4.1.1. Шийринг интерферометри за изследване вълнови фронтове

shearing, от английски език, означава ножица, сръзвам във вертикална посока на две части

Този клас уреди се базира върху следната идея:

С подходяща оптична система, от един начален (примарен) вълнов фронт, който е обект на изследване, могат да бъдат изведени два секундарни вълнови фронта с равни комплексни амплитуди, които в началния момент да съвпадат точно. След това, отново с подходяща оптична система, двата секундарни фронта могат да бъдат:

- преплъзнати (транслирани) относително един спрямо друг,
- завъртени един спрямо друг около подходящо избрана за целта ос на въртене,

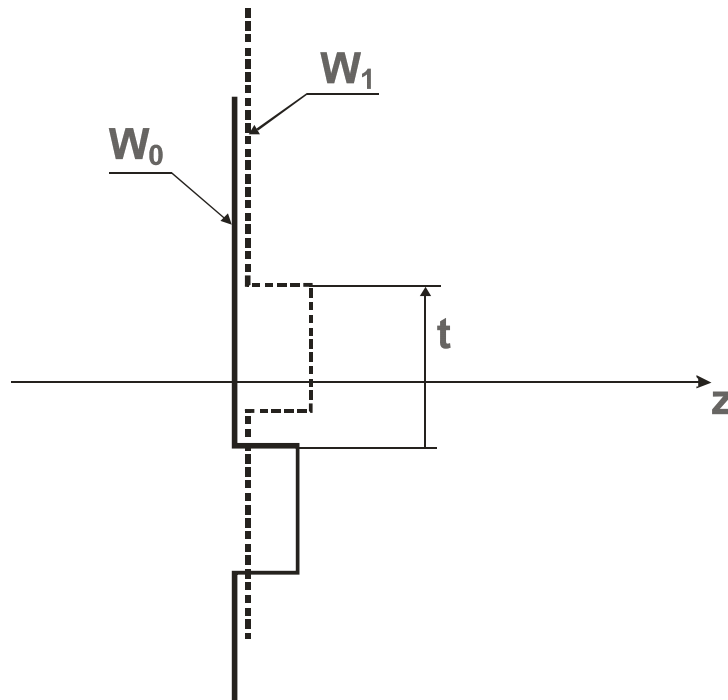
и оставени да интерферират помежду си. Така вълновият фронт интерферира сам със себе си. Само тества се. Веднага става ясно, че методът е неприложим за силно деформирани фронтове. Той се използва основно при изследването на малки, локални фазови деформации на вълнови фронтове.

Според вида на относителното разместване на двете половини от вълновия фронт, шийрингът се дели на три основни вида

А. Напречен (транслационен) шийринг

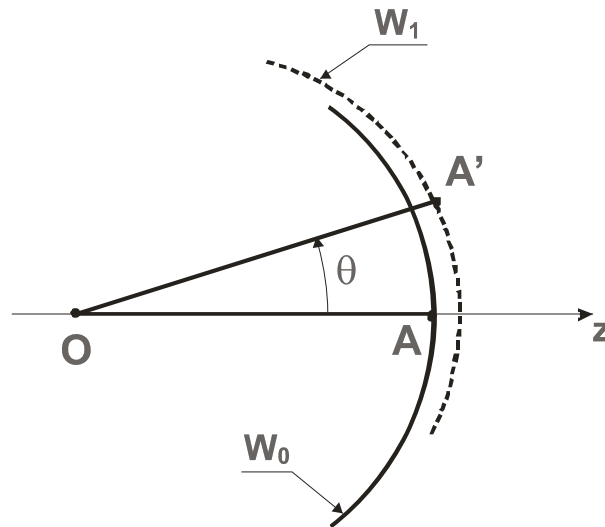
На Фиг. 4.1 е показан схематично един пример на транслационен шийринг. Плосък вълнов фронт W_0 се разпространява по посока на оптичната ос z . От него, с помоща на някаква оптична система, е отделен секундарния вълновия фронт W_1 , който е транслирана на стойност t спрямо примарния. Този вид шийринг е в основата на множество оригинални конструкции на интерференционни микроскопи. Методите за получаване на секундарните фронтове са основно два:

- с помоща на светоделителни огледални или призмени системи, или
- с помоща на поляризационни светоделители.



Фиг. 4.1

Б. Ъглов (радиален) шийринг

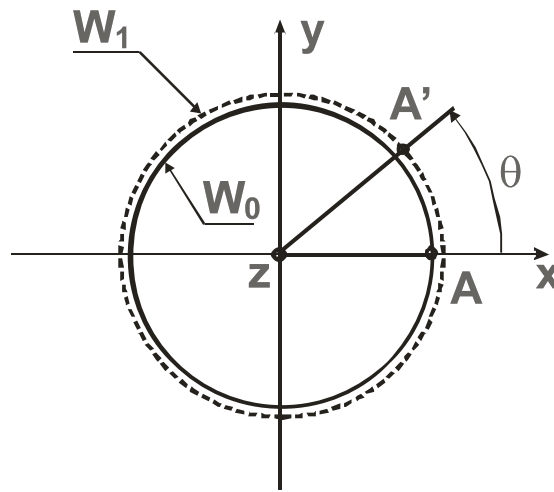


Фиг. 4.2

На Фиг. 4.2 е показан пример на ъглов шийринг със стойност θ , при който част от примарния сферичен фронт W_0 се завърта до секундарния W_1 . Ротацията е около оста O , която е перпендикулярна на оптичната ос z .

В. Ротационен шийринг

Пример на ротационен шийринг със стойност θ е показан на Фиг. 4.3. От примарния вълнов фронт W_0 е отделен секундарния W_1 , който е завъртян на ъгъл θ около оптичната ос z .



Фиг. 4.3

Към шийринг интерферометрите могат да бъдат причислени, при някои от приложенията, и интерферометрите с обръщане на вълновия фронт.

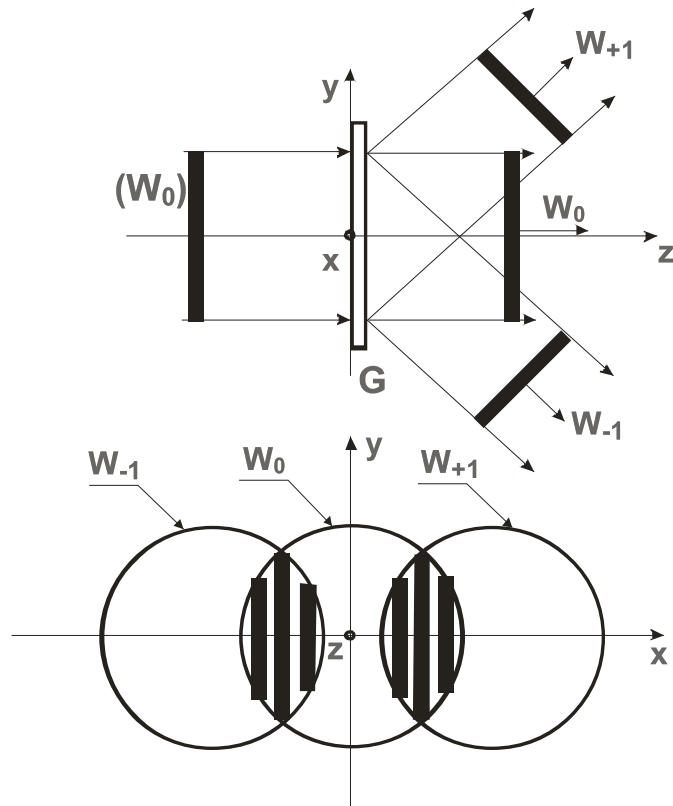
4.1.2. Интерферометър на Рончи

С дифракционна решетка се постига константен ъглов *shearing*, който по стойност е много стабилен във времето, което е резултат от еднокомпонентната структура на интерферометъра.

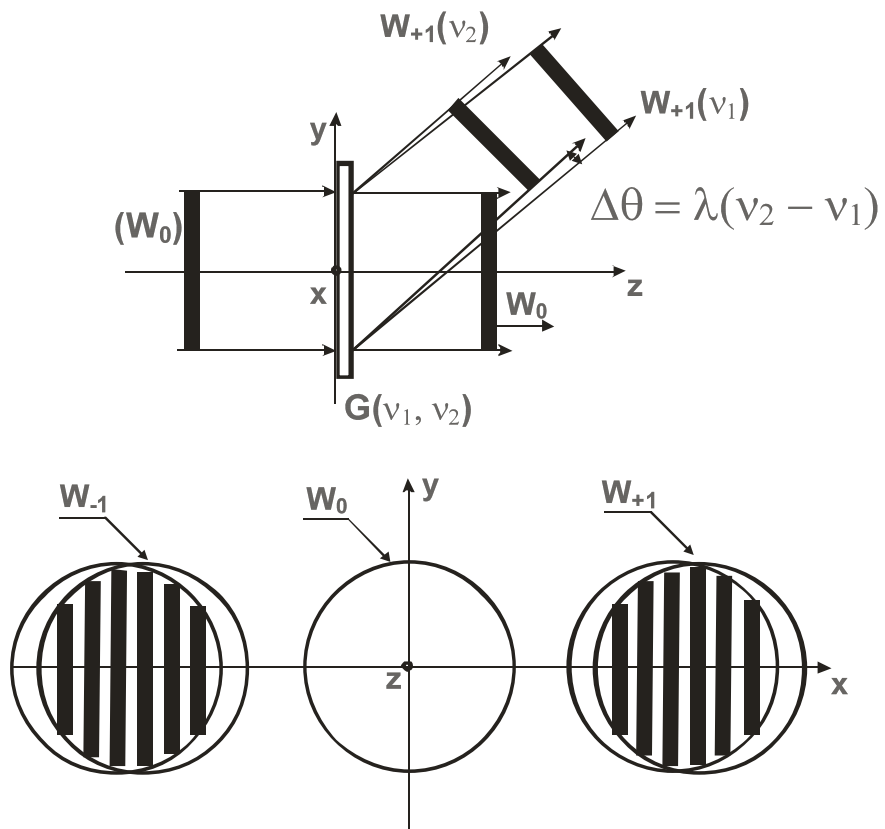
Интерферометърът на Рончи (Фиг. 4.4) има следните недостатъци:

1. Интензитетът на интерфериращите снопове в общия случай е различен (тъй като помежду си интерферират различни дифракционни порядъци) и това води до влошаване на контраста.
2. Лошо използване на полезната апертура на снопа.
3. Еднопосочен шийринг. Интерферометрите дават наклона на вълновия фронт в посока на *shearing*-а. За това често пъти, при несиметрични фронтове се налага използването на *shearing* в различни посоки. Математически се доказва, че от два ортогонални шийринга може да се възстанови топографията на примарния вълнов фронт.

Тези недостатъци се отстраняват с двучестотна дифракционна решетка, която най-често се получава по холографски път.

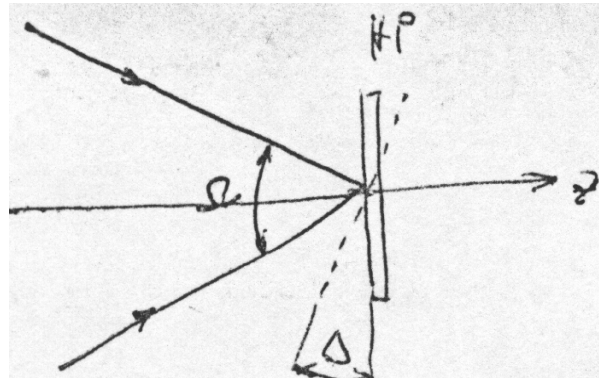


Фиг. 4.4

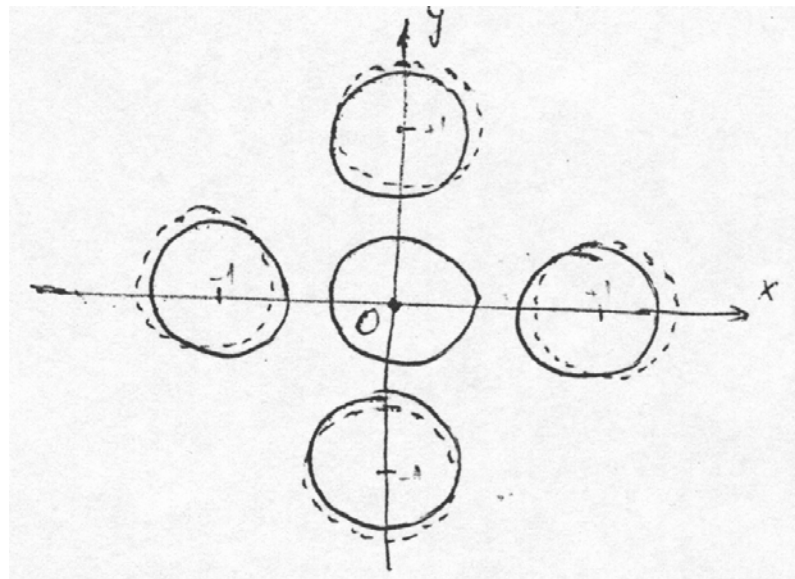


Фиг. 4.5

Двучестотната холографска дифракционна решетка може да бъде записана върху една холографска фото плака (или друга среда) по следната схема:



1. Интерференчна картина, получена в резултат от наслагването на две равнинни, монохроматични вълни, сключващи помежду си ъгъл Ω , се регистрира върху холографската плака HP. Така се получава първата дифракционна решетка с честота ν_1 .
2. Изменя се стойността на ъгъла Ω с $\Delta\Omega$. Това става пряко, чрез пренастройка на ориентацията на сноповете, или чрез накланяне на плаката HP на малък ъгъл Δ , след което се прави втората експозиция. Така се регистрира и втората дифракционна решетка, която има честота ν_2 .
3. Фотоплаката HP се завъртат на 90° около оста z и отново се повтарят две експозиции, съгласно т.1 и т.2. Получаваме ортогонална система от две решетки, идентични с първите две.
4. Плаката HP се обработва - проявяване, фиксиране и избелване.



Тази двучестотна, ортогонална дифракционна решетка, ако е чисто синусоидална, дава четири дифракционни порядъка (± 1 -те порядъци по x и y) плюс нулевият, в който, при добро качество на решетката, не се наблюдава интерференция. Това е напълно достатъчно, за да бъде възстановена топографията на вълновият фронт.

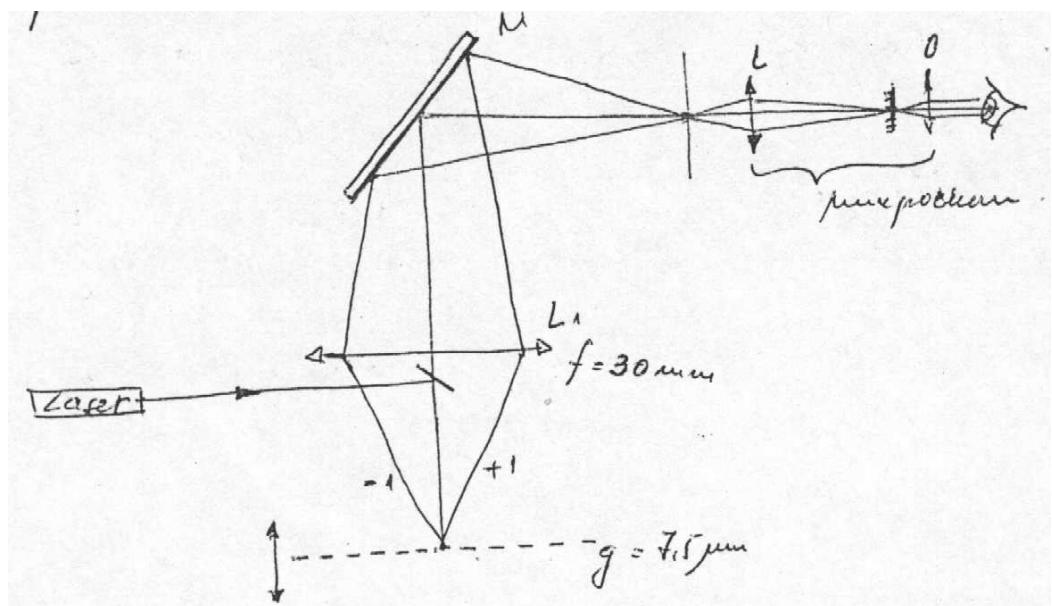
Този вид интерферометри се използват широко за тестване на оптични елементи (Wyant, 1973 г.). Предимствата му са:

- проста конструкция
- стабилен във времето *shear*.
- много малка чувствителност към външни вредни вибрации, тъй като двата интерфериращи снопа, заедно с решетката трептят синхронно в пространството. Този тип интерферометри се наричат **Common Path** (с общ път на лъчите) и са особено подходящи за измервания в цехови условия (места където има непрекъснати вибрации).

Освен за контрол на вълнови фронтове, този тип интерферометри се използва за изследване на оптични нехомогенности в прозрачни среди.

4.1.3. Дифракционни интерферометри за изследване на малки премествания

Като пример нека разгледаме следната схема :

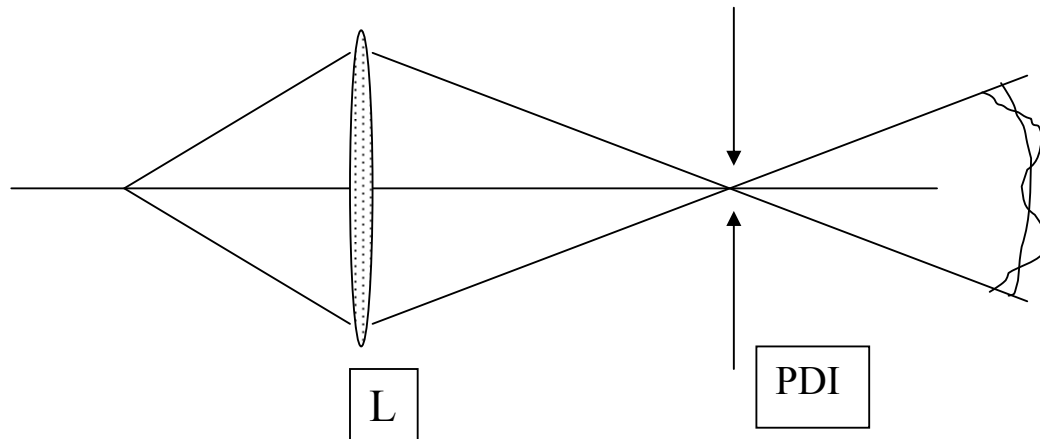


Колимиран лазерен сноп с малък диаметър се отразява от малко по апертура огледало, монтирано пред обектива L_1 и пада нормално върху отражателната дифракционна решетка G . Обратно отразени, в апертурата на обектива L_1 попадат само първите порядъци; нулевият е маскиран от огледалото. В образната равнина на обектива двата дифрактирани снопа интерферират. Една трансляция на решетката G по посока на оптичната ос води до промяна в параметрите на интерференчната картина. Информацията за преместването може да се извлече визуално с помощта на измерителен микроскоп, но в промишлени условия това се осъществява по фото електронен път. Този уред е намерил приложение при автоматичния контрол на

положението на образната равнина на обективите за копиране на фотошаблоните при производството на интегрални схеми.

4.1.4. Други схеми на дифракционни интерферометри

1. Интерферометър на Линник

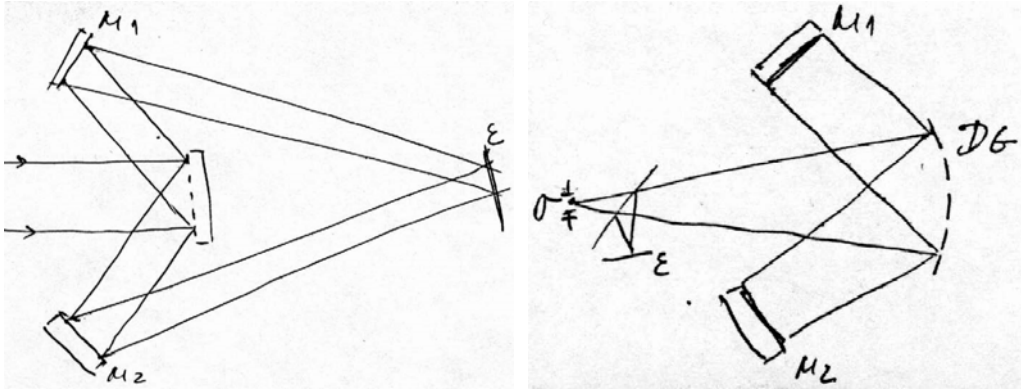


Този уред служи за контрол на вълновата аберация на обективи, проектирани за режим на работа с крайно увеличение. Образът на точков източник създаден от тествания обектив L се настройва да попадне в центъра на точковата дифракционна бленда PDI (от point diffraction interferometer). В пространството зад блендата интерферират две вълни:

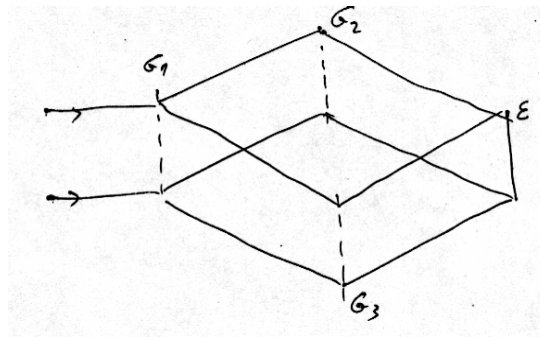
- първата вълна е нулевият дифракционен порядък, който има сферична форма на фазовия вълнов фронт;
- втората вълна е остатък от примарната аберирана вълна.

Следователно, аберираната вълна се сравнява по интерференционен път с една изкуствено създадена опорна Гаусова сфера. Основният недостатък на първоначалната конструкция на Линник е значителната разлика в интензитетите на двете вълни, което от своя страна води до понижаване на контраста на ивиците. По-късно, със своите разработки проф. Фритц Цернике и Роберт Смарт отстраняват напълно тази неприятна особеност. Днес този уред се произвежда от редица фирми и намира приложение при тестването на обективи и огледни системи.

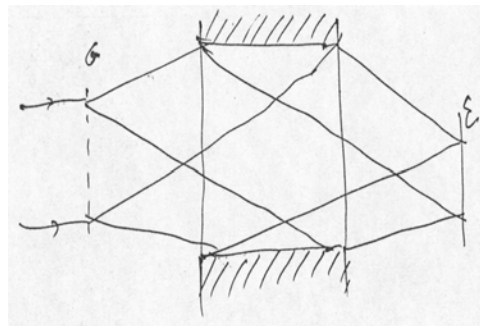
2. Интерферометър на Майкелсон с дифракционен светоделител



3. Интерферометър на Мах – Цендер с три дифракционни решетки



4. Дифракционен интерферометър за изследване на вътрешни цилиндрични повърхнини



5. ОПТИЧНИ ЕЛЕМЕНТИ НА ИНТЕРФЕРОМЕТРИТЕ

5.1 Основни изисквания към оптичните елементи на интерферометрите

Както бе отбелязано, интерферометрите се прилагат при решаването на две основни групи задачи:

- за определяне на средната (по апертурата на интерференционната картина) фазова разлика между двете наслагващи се вълни, т. е. за измерване на разликата в оптичните пътища чрез броене на ивици.

приложение: контрол на преместване на детайли, на размери, измерване на показателя на пречупване на хомогенна среда и др.

- за измерване на локалните вариации на фазовата разлика по полето на интерференционната картина, т. е. за измерване на деформацията на интерференчните ивици.

приложение: за контрол на формата на повърхности, на тяхната микрогеометрията, разпределение на плътности в потоци или по-точно, на вариациите в разпределението на показателя на пречупване в нехомогенна среда, за измерване на вълновата аберация на оптични елементи или системи и др.

Разликите в изискванията към оптичните детайли на интерферометрите от двете групи са съществени и се заключват в следното:

1. Оптичните детайли на уредите от **втората група** трябва да бъдат изготвени с по-висока точност, тъй като всяка деформация на ивиците, причинена от дефекти в оптиката, се проектира непосредствено върху точността на измерването. Обратно, при интерферометрите от първата група малко изкривяване на ивицата (напр. 0,1-0,2 от нейния пространствен период) не влияе съществено върху точността на измерването и се счита за допустимо.
2. При интерферометрите от **първата група** е много по-опасно самоволното изместване (пълзенето във времето) на ивиците в резултат на вибрации, на деформация, в резултат от натоварвания на конструкцията или от стареене на материала, или от температурни деформации. Това налага строги изисквания към механичната стабилност на конструкцията на уреда. При интерферометрите от втората група тези изисквания не са толкова строги тъй като при тях времето за регистрация (фотографска или електронна) е сравнително кратко и едно бавното “пълзене” на ивиците обикновено не води до понижаване на точността по допустимите норми, докато при уредите от първата група подобен ефект е от решаващо значение.

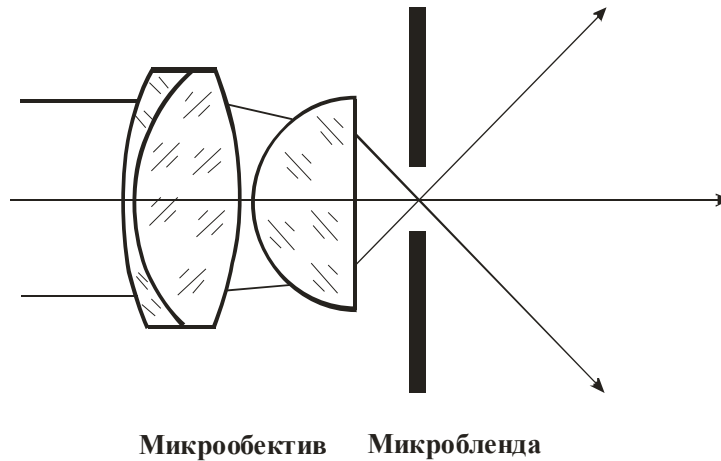
5.2. Точков източник

“Точковият” източник на монохроматично поле е основен елемент в лазерната измерителна техника. Той е източник на “сферична” вълна, която може да служи като еталон за сравнение с друга такава, или, при необходимост, да се колимира. Както е известно, математически точна колимация на един

светлинен сноп е възможна само при наличието на математически точков източник и на безаберационен обектив.

Идеален, безкрайно малък точков източник не съществува. Най-елементарните съображения подсказват, че той би трябвало да притежава безкрайно голяма мощност. Нито един елементарен вълнов процес не може да бъде ограничен в рамките на геометрична точка.

На практика, тази задача се решава добре чрез фокусиране на лазерният сноп с късофокусна система, напр. микрообектив. Микрообективите на реномираните производители са така добре коригирани, че се доближават до дифракционно ограничените системи. В повечето случаи това решение е задоволително, но то има един недостатък. Спекъл структурата, суперпонирана върху снопа, се запазва. Тя, от своя страна, се отстранява с пространствен филтър (Фиг. 5.1). Той служи за филтриране на нежеланите висши дифракционни порядъци, които са резултат от дифракцията върху частиците прах, полепнали по свободните оптични повърхности на обектива. Те са неизбежни и техния среден диаметър статистически е в интервала от 50 до 100 μm .



Фиг. 5.1

Ако приемем, че частиците са сферични и идеално поглъщащи, то дифракцията в далечната зона върху една от тях може да бъде представена с комплексната си амплитуда:

$$U_p(u, v) = C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) \exp[-2\pi i(\xi u + \eta v)] d\xi d\eta,$$

където u и v са пространствените честоти, а:

$$F(\xi, \eta) = 1 - \text{rect}\left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\rho}\right)$$

Амплитудата на полето в точка P , лежаща във фокалната равнина на микро – обектива, ще бъде:

$$U_p = \delta(\rho) \cdot \frac{2J_1(k\rho c)}{k\rho c},$$

а интензитетът ще бъде пропорционален на:

$$I_p \sim \left[\frac{2J_1(k\rho c)}{k\rho c} \right]^2$$

От таблиците за Бесселовите функции намираме, че първият минимум в разпределението на интензитета във фокалната равнина се достига за стойност на аргумента:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \rho c = 3.83$$

Диаметърът на блендата се избира така, че да се равнява на този на първият дифракционен минимум. По този начин се филтрират (маскират се) висшите дифракционни порядъци като от друга страна се използва максимално енергията на снопа.

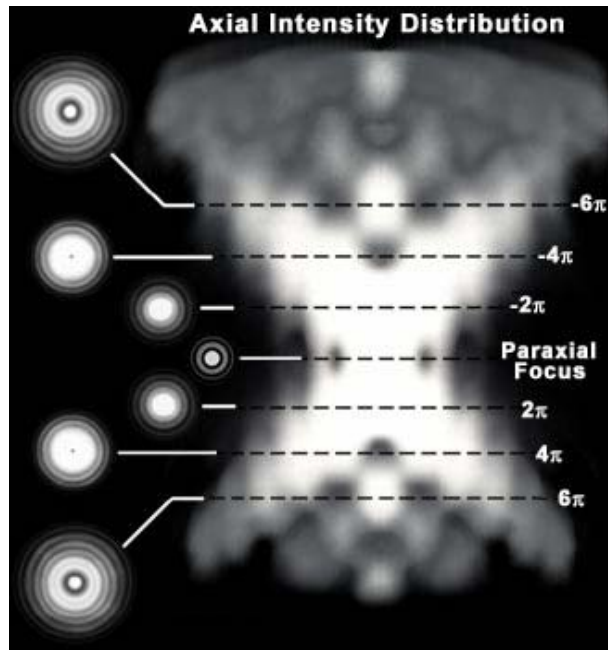
Тъй като ъгълът на дифракция c е много малък, за него можем с добра точност да пишем, че се равнява на

$$c = \frac{d}{2f},$$

където d е диаметра на блендата, а f е фокусното разстояние на микрообектива. Следователно:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \rho \frac{d}{2f} = 3.83 \quad d = \frac{3.83\lambda f}{\pi\rho}.$$

Забележка: Разпределението на комплексната амплитуда в осево направление е показано на следната фигура.



Нулевият дифракционен порядък, който на практика служи като “точков” източник представлява издължено в аксиално направление овално тяло с формата на “пура”. Целият този светещ обем се изобразява от следващата оптична система.

5.3 Ректификация на гаусов сноп

С една точкова бленда се филтрира нежеланата спекъл структура, която е суперпонирана върху основната вълна. Но след тази операция се запазва Гауссовото разпределение на амплитудата и на интензитета на снопа.

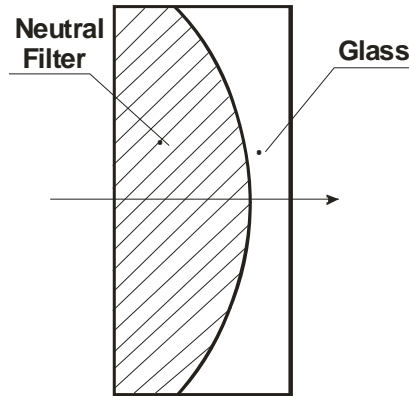
$$I = I_0 \exp\left[-(r/w)^2\right].$$

Има два основни метода за ректификация (за изравняване) на Гауссовия профил на интензитета.

- със загуба на енергия. Той е по-евтин, но както става ясно, води до немалки загуби на енергия.
- чрез целенасочено абериращи системи. При тези ректификатори загубите на енергия са минимални, но те се изработват значително по-трудно и за това са скъпи.

5.3.1. Енергетични методи за ректификация

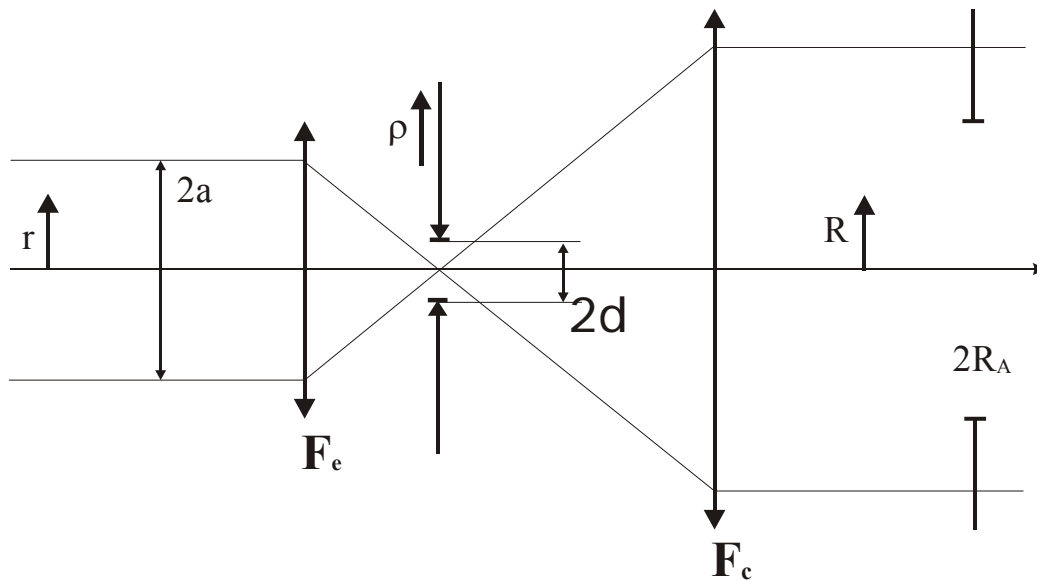
Един пример на евтин, но не особено прецизен ректификатор е показан на следната схема (Фиг. 5.2):



Фиг. 5.2

Планпаралелната плочка се състои от две слепени лещи. Едната, плоскоизпъкналата, е изработена от неутрално филтърно стъкло, а втората, плоско вдлъбнатата, от безцветно оптично стъкло. При този елемент основен проблем е съгласуването на двата показателя на пречупване, така, че елемента да бъде с нулева оптическа сила. Също така, наличието на слепваща среда не позволява излагането на високи мощности.

Най-често използваната схема за ректификация на гаусов сноп е афокалната система, показана на Фиг. 5.3. Нека разгледаме енергетичните съотношения в една такава двуелементна оптична система, предназначена едновременно за колимиране и ректификация на лазерен сноп.



Фиг. 5.3

Най-често използваната оптична система е изобразена на горната схема: двойка лещи реализират двойно Фурие-преобразуване на комплексната амплитуда на входната вълна, като при това осигуряват необходимото разширение на снопа.

Предполагаме, че са изпълнени следните условия:

1. Оста на лазерния сноп съвпада с оптичната ос на центрираната система.
2. Лазерният сноп има Гаусов профил на разпределение на интензитета.
3. На този етап пренебрегваме дифракционните ефекти от самоограничаването на снопа и от блендирането му някъде по пътя.
4. Апертурата на разширяващата леща е по-голяма от $2a$, докато апертурата на колимационния обектив може да се избере и по-малка от диаметъра на вече разширения сноп.

Във входната зеница полето нека означим с $E(r) \sim \exp[-(r^2/a^2)]$, а интензитетът му да бъде

$$I(r) = (2P_0 / \pi a^2) \exp(-r^2/a^2),$$

където a е радиуса, на който интензитетът $I(r)$ спада до ниво e^{-2} от максималната си стойност (т. е. на 13,5% от максимума). P_0 е цялата мощност на входното поле.

Разпределението на амплитудата в околността на F_1' , с точност до константа, е

$$FT\{E(r)\} = E(\rho)$$

$$E(\rho) \sim \exp[-(\pi a / \lambda f_e)^2 \rho^2],$$

а интензитетът е:

$$I(\rho) = (2\pi P_0)(a / \lambda f_e)^2 \exp[-2(\pi a / \lambda f_e)^2 \rho^2]$$

Ако отсъства диафрагмата в F_1' , в F_2' разпределението на амплитудата, респ. на интензитета ще бъде:

$$E(R) = FT\{E(\rho)\}, \text{ а}$$

$$I(R) = (2P_0 / \pi)(f_e / f_c a)^2 \exp[-2(f_e / f_c a)^2 R^2]$$

За да бъде снопът разширен, необходимо е $f_e < f_c$. В разширения сноп интензитетът спада e^2 пъти на радиуса $R = (f_c / f_e)a$, което отговаря на геометричната представа.

Както се вижда от горните разсъждения, след разширяването и колимацията снопът запазва своя гаусов характер на радиално разпределение на интензитета. Присъствието на бленди във двете фокални равнини (в F_1' и в F_2') би могло да доведе до ректификация на снопа. Следователно, необходимо е да бъдат изследвани следните проблеми:

1. До каква степен на ректификация води поставянето на бленди.
2. Наличието на бленди до каква загуба на мощност би довело.
3. Какво количество енергия ще се отложи върфу блендата в F_1' .

1. Ако поставим точковия филтър с $\phi 2\delta$, разпределението на интензитета във фокалната равнина на $\underline{2}$, не е Гаусово.

$$E(\delta, R) \sim 2\pi \int_0^{\delta} E(\rho) J_0(2\pi R\rho / \lambda f_c) \rho d\rho$$

Следователно, интензитетът е функция на δ и R . Този профил по-удобно се представя чрез безразмерни координати:

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= (\pi a / \lambda f_e) \delta & x &= (\pi a / \lambda f_e) \rho \\ \bar{R} &= (f_e / f_c a) R \end{aligned}$$

и, ако означим с $I(\bar{\delta}, 0)$ е интензитетът върху оптичната ос, то:

$$\frac{I(\bar{\delta}, \bar{R})}{I(\bar{\delta}, 0)} = \frac{4 \int_0^{\bar{\delta}} \exp(-x^2) J_0(2\bar{R}x) x dx}{\left[1 - \exp(-\bar{\delta}^2)\right]^2}$$

$$\text{Вижда се, че при } \bar{\delta} \rightarrow \infty \quad \frac{I(\bar{\delta}, \bar{R})}{I(\bar{\delta}, 0)} \rightarrow \exp(-2\bar{R}^2)$$

При $\bar{\delta} = 4$ профила на интензитета практически не се различава от $\bar{\delta} \rightarrow \infty$.

2. Подобряването на еднородността на снопът става за сметка на мощността. Цялата преминала мощност през системата с апертура $2R_A$ и с диафрагма, с радиус $\bar{\delta}$, е

$$P(\bar{\delta}, \bar{R}_A) = 2\pi \left(\frac{f_c a}{f_e}\right)^2 \int_0^{\bar{R}_A} I(\bar{\delta}, \bar{R}) \cdot \bar{R} \cdot d\bar{R}$$

Ако пренебрегнем загубите в системата, пълната мощност $P(\infty, \infty) = P_0$.

От тук получаваме:

$$P_0 = 2\pi \left(\frac{f_c a}{f_e}\right)^2 \int_0^{\infty} I(\infty, \bar{R}) \cdot \bar{R} \cdot d\bar{R}$$

От горните изрази получаваме:

$$I(\infty, \bar{R}) = I(\infty, 0) \cdot \exp(-2\bar{R}^2),$$

или от тук:

$$P_0 = \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\frac{f_c \cdot a}{f_e}\right)^2 \cdot I(\infty, 0)$$

Не е трудно да се покаже, че:

$$I(\infty, 0) = I(\bar{\delta}, 0) / [1 - \exp(-\bar{\delta}^2)]^2$$

Ако нормираме $P(\bar{\delta}, \bar{R}_A)$ с P_0 , то:

$$\frac{P(\bar{\delta}, \bar{R}_A)}{P_0} = 4 [1 - \exp(-\bar{\delta}^2)]^2 \int_0^{\bar{R}_A} \frac{I(\bar{\delta}, \bar{R})}{I(\bar{\delta}, 0)} \cdot \bar{R} \cdot d\bar{R}$$

3. За конструкцията е важно да се знае каква част от енергията се губи върху точковата диафрагма. Това се прави, за да се избегне нейното повреждане в резултат от поглъщането на енергия.

Пълната мощност преминала през точковата диафрагма е:

$$P_T = 2\pi \int_0^{\delta} I(\rho) \cdot \rho \cdot d\rho$$

следователно

$$\frac{P_T}{P_0} = 1 - \exp(-2\bar{\delta}^2),$$

а мощността загубена върху диафрагмата (и погълната или разсеяна от нея) е:

$$\frac{P_c}{P_0} = 1 - \frac{P_T}{P_0} = \exp(-2\bar{\delta}^2)$$

Извод: при $\bar{\delta} \leq 1$ диафрагмата задържа значителна част от енергията.

5.3.2. Селективно аберирана система

Най-общо, един ректификатор от този тип се състои от два елемента. В равнината А (Фиг. 5.4), която избираме във входната зеница на първият елемент, пада **плоска** вълна и разпределението на осветеността там е:

$$E(r) = (2\pi\alpha^2)^{-1} [1 - \exp(-r_0^2 / 2\alpha^2)]^{-1} P \cdot \exp(-r^2 / 2\alpha^2) \quad /1/$$

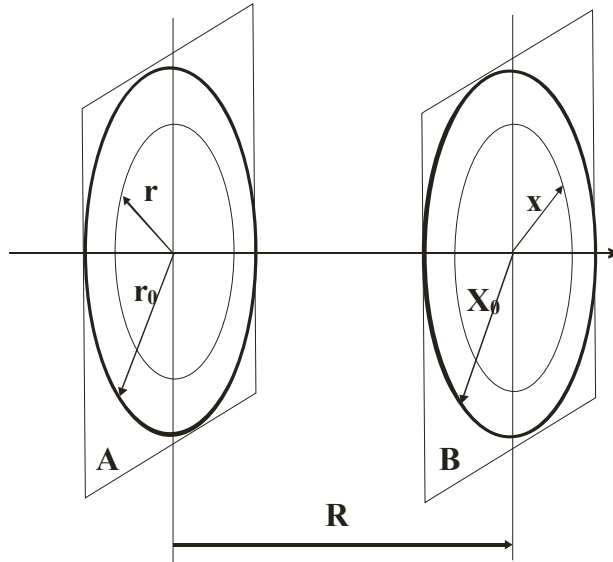
където

r_0 е радиуса на зеницата

α е Гауссовата константа.

На определено разстояние, в равнината В, която пък нека бъде входната зеница на втората система, осветеността трябва да бъде константна.

Излъчването от пръстена ($r, r + \Delta r$) среща равнината В в пръстена ($x, x + \Delta x$).



Фиг. 5.4

Трябва да се потърси поне един оптичен път от точка r до точка $x(r)$, за всеки входен лъч с височина на падане r , така че снопът да бъде ректифициран в равнината В. Оказва се, че съществуват два такива пътя. От уравнение (1) и от радиалната симетрия следва, че мощността в кръг с радиус $r \leq r_0$ е равна на

$$p_A(r) = P [1 - \exp(-r^2 / 2\alpha^2)] / [1 - \exp(-r_0^2 / 2\alpha^2)] \quad /2/$$

Нека радиуса на зеницата в равнината В да е X_0 . Искаме вътре в кръг с радиус X_0 :

1. осветеността да бъде константа и да се равнява на I;
2. цялостната мощност да бъде равна на P (предполагаме, че процеса е без загуби).

Тогава осветеността е $I = P / \pi X_0^2$. Също така, цялата мощност в кръг с радиус равен на $x \leq X_0$ ще бъде

$$p_B(x) = P (x / X_0)^2 \quad /3/$$

Ако приравним изразите /2/ и /3/, и предположим, че за всяко $r \leq r_0$ съществува поне едно $x \leq X_0$, с такава стойност, за да включи вътре в себе си същата мощност, която е в кръг с радиус r , и по-важното, едновременно с това осветеността да е константна и равна на $(P/\pi X_0^2)$.

Тогава:

$$x(r) = \pm X_0 \cdot \left[1 - \exp\left(-r^2/2\alpha^2\right)\right]^{1/2} / \left[1 - \exp\left(-r_0^2/2\alpha^2\right)\right]^{1/2} \quad /4/$$

Знакът (\pm) налага две решения: (-) изисква по-силно пречупване, което би силно утежило оптичката конструкция – първата оптична система би трябвало да имат по-голяма пречупваща сила. Затова избираме решението със знак (+). Но тъй като $x(r) \neq r$ и тяхната функционална връзка е нелинейна, вълновият фронт вече не е равнинен. Това от своя страна налага необходимостта от втори оптичен елемент, разположен в околността на В. Ролята на тази система е да възстанови първоначалната колимация на снопа.

A. Избор на първата селективно аберирана система със сферични повърхнини

Ако вълновата аберация на първата оптична система е $\phi(r)$ и нейното фокусно разстояние е R , то

$$x(r) = R \frac{\partial \phi(r)}{\partial r}, \quad (R \text{ се измерва от } H_1' \text{ до В}) \quad /5/$$

Гаусовата точка е взета за начало на цилиндричната координатна система (x,z) . Предполагаме, че лазерният сноп е успоредна на оптичната ос. Тогава снопът ще се деформира единствено от всички степени на сферичната аберация, представени с коефициентите a_i . Предполагаме до развитие до 9-ти ред:

$$\phi(r) = a_1 r^2 + a_2 r^4 + \dots + a_5 r^{10} + \dots \quad /6/$$

Използвайки (5):

$$x(r) = R \cdot r \cdot (2a_1 + 4a_2 r^2 + 6a_3 r^4 + \dots + 10a_5 r^8) \dots \quad /7/$$

от (4):

$$x(r) = 2^{-1/2} \cdot K \cdot (r/\alpha) \cdot \left[1 - 8^{-1} \cdot (r/\alpha)^2 + (5/384)(r/\alpha)^4 + \dots + 0 \cdot (r/\alpha)^6 - (71/92160)(r/\alpha)^8 + \dots\right] \quad /8/$$

където

$$K = X_0 / \left[1 - \exp\left(-r_0^2/2\alpha^2\right)\right]^{1/2} .$$

Сега, ако приравним коефициентите пред равните степени на α в (7) и (8) ще получим

$$\begin{cases} a_1 = 2^{-3/2} (K/R) \cdot \alpha^{-1} \\ a_2 = -2^{-1/2} \cdot (1/32) \cdot (K/R) \cdot \alpha^{-3} \\ a_3 = 2^{-1/2} \cdot (5/2304) \cdot (K/R) \cdot \alpha^{-5} \\ a_4 = 0 \\ a_5 = -2^{-1/2} \cdot (71/921600) \cdot (K/R) \cdot \alpha^{-9} \end{cases} \quad /9/$$

Коефициентът a_1 отразява де фокусировката по оста z . Тъй като $a_1 = \frac{z}{2R^2}$, то положението на равнината B следва да бъде отместено на стойност $(R+z)$ от параксиалната образна главна равнина на първата оптична система. Тогава от /9/ за дефокусировката ще получим стойността

$$z = 2^{-1/2} (KR / \alpha) .$$

Това бе за първата оптична система.

Б. Избор на втората оптична система

Оптичната система разположена в околността на равнината B нека има функция на вълновата аберация $\theta(\rho)$ и фокусно разстояние R' .

$$\theta(\rho) = b_1 \rho^2 + b_2 \rho^4 + b_3 \rho^6 + \dots + b_5 \rho^{10} \dots, \quad /10/$$

където ρ е радиалната координата в изходната зеница на втората оптична система.

Трасирайки лъчи през I оптична система, установяваме (в дискретна форма) вълновия фронт, попадащ във II оптична система. Нека отклонението от опорната сферата с радиус R' е $\Delta(\rho)$.

Условието за корекция е $\theta(\rho) = -\Delta(\rho)$.

Трасирайки 5 лъча с радиуси ρ_i ($i = 1 \dots 5$) на опорната сфера R' , получаваме 5 уравнения за коефициентите b_i .

$$-\Delta(\rho_i) = b_1 \rho_i^2 + b_2 \rho_i^4 + \dots + b_5 \rho_i^{10} \quad /11/$$

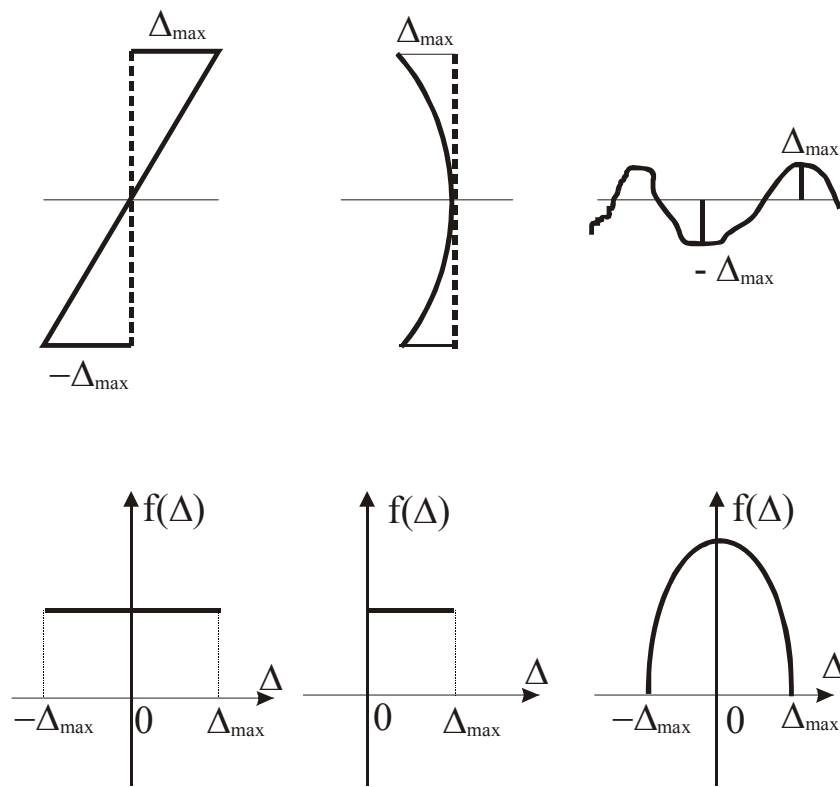
Решаваме ги и знаейки a_i и b_i получаваме целевата функция (*merit function*) за корекция на системата.

5.4. Влияние на точността на повърхностите и на настройката на крайните огледала в Майкелсоновия интерферометър

Типове неточности:

1. Повърхността на огледалата не е съвършена равнина. Източници са процеса на полиране, нанасянето на отражателният слой, закривяване на повърхността в резултат на механични въздействия.
2. Движейки се, огледалото не остава успоредно на първоначалното си положение – то неизбежно извършва завъртания.

В общия случай предполагаме, че едното огледало е идеална равнина. Тогава нека означим с $f(\Delta)$ функцията (Фиг. 5.5), описваща вероятността за поява на грешка със стойност Δ по повърхността на елемента, а с ΔM максималната стойност на тази грешка.



Фиг. 5.5

И сега, както обикновено, нека разгледаме еквивалентната схема на Майкелсоновия интерферометър, т.е. като две равнини (едното огледало е виртуален образ на другото в светоделителя) – отново предполагаме, че едната равнина е идеална.

При точков източник и строго успоредни огледала, ивиците са концентрични. Разпределението на интензитета е:

$$I = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} \cos(\phi),$$

ϕ е фазовата разлика. $\phi = (2\pi/\lambda)2t \cos(\theta),$

λ = дължина на вълната

t = разстоянието между реалното и виртуалното огледала

θ = ъгълът на падане на светлината.

Когато $I_1 = I_2 = I_0$ то $I = 2I_0(1 + \cos\phi)$.

Не паралелност на огледалата предизвиква завъртане и евентуално изкривяване на вълновите фронтове, а от там и вариации по апертурата на както на t , така и на ϕ . Интерферометърът може да се разглежда като съставен от голям брой елементарни такива. В идеалния случай, при $t = \text{const}$, елементарните интерференчни картини ще се насложат точно. Но при наличието на грешки, елементарните картини ще се разместят по протежение на оста ϕ , което ще доведе до разширяване (“размазване”) на ивиците.

При слаба промяна на t с Δ , изменението на ϕ при нормално падане е: $\delta\phi = (2\pi/\lambda)\Delta$. Ако $f(\Delta)$ описва разпределението на Δ по S (повърхността на елемента), то за елементарна площ dS , по която t приема стойности в интервала от $t + \Delta$ до $t + \Delta + d\Delta$ е валидно твърдението $dS = f(\Delta)d\Delta$. Сега, в идеалния случай, осветеността в точка върху ивицата е $\text{const} \times I(\phi) \times S$. Но поради наличието на някакво разпределение на грешките по S , $I(\phi) \neq \text{const}$., следователно, осветеността в точката е:

$$\text{const} \cdot \int_S I(\phi) \cdot dS = \text{const} \cdot I'(\phi) \int_S dS .$$

Така, че разпределението на интензитета в ивицата е дадено в този случай от:

$$I' = \int I(\phi) dS / \int dS$$

По-нататък можем да използваме $\delta\phi$ като променлива вместо Δ .

При Gauss-ово разпределение на грешките, разпределението на интензитета е дадено от:

$$\frac{(\alpha/\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha\delta\phi^2] \cdot 2I_0 \cdot [1 + \cos(\phi + \delta\phi)] \cdot d(\delta\phi)}{(\alpha/\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha\delta\phi^2] \cdot d(\delta\phi)} ,$$

където: $\alpha = (2\delta\phi_\varepsilon)^{-1}$ и $\delta\phi_\varepsilon = (4\pi/\lambda) \cdot (\bar{\Delta}^2)^{1/2}$.

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \exp\left(-\frac{1}{4\alpha}\right)$$

При отклонение от успоредност или при закривяване на огледалата:

$$I' = \frac{2I_0}{2\delta\phi_m} \int_{-\delta\phi_m}^{+\delta\phi_m} [1 + \cos(\phi + \delta\phi)] d(\delta\phi)$$

или $\Gamma = 2I_0 [1 + \cos\phi (\sin\delta\phi_m / \delta\phi_m)]$,

където $\delta\phi_m = (4\pi / \lambda) \cdot (3)^{1/2} \cdot (\bar{\Delta}^2)^{1/2}$ и

$$\Delta_{\max} = (3)^{1/2} (\bar{\Delta}^2)^{1/2},$$

а контраста е

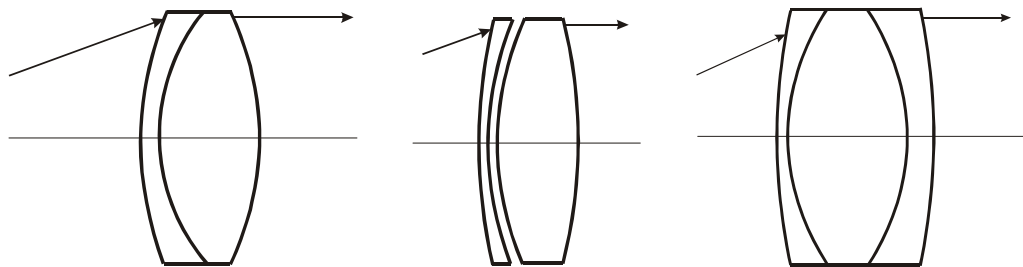
$$V = (\sin \delta\phi_m / \delta\phi_m)$$

От тук се вижда, че за да получим задоволителни резултати, повърхността на огледалата трябва да бъде с отклонение от идеалната равнина не повече то $\lambda/20$. Този резултат потвърждава условието поставено от А. Майкелсон (1927). От горните резултати също може да се види, че неуспоредността на едното огледало спрямо друго не трябва да бъде по-голяма от $(1/8)\lambda$. Този резултат е в съгласие с условието на Дж. Строук (1957).

(Също виж Williams; Applied Optics, 1966, p. 1084.)

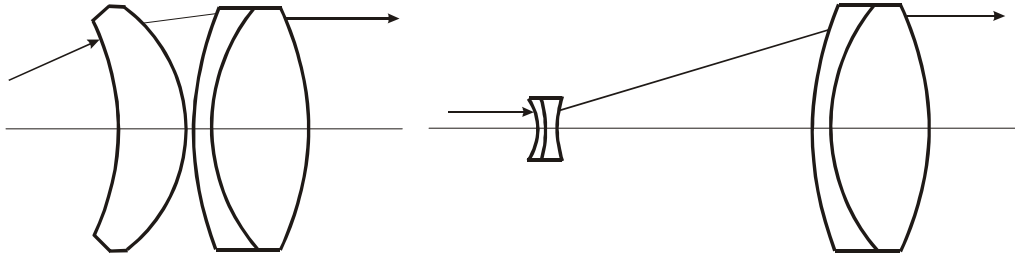
5.5. Оптически конструкции на колиматори

Използват се класическите телескопични системи, но често пъти леко модифицирани що се отнася аберационното им състояние, с цел специфичните особености на лазерните приложения.



Фиг. 5.6

Има също системи разработени специално за лазерни цели:



Фиг. 5.7

Съществуват множество други конструкции, които в основата си са варианти на тези основни идеи.

Основен проблем е температурната стабилност на една такава система. При изменение на температурата се изменят и следните параметри:

$$\text{Радиусите: } R \rightarrow R + dR = R(1 + \alpha_g \cdot dT)$$

$$\text{Дебелините: } D \rightarrow D + dD = D(1 + \alpha_g \cdot dT)$$

$$\text{Разстоянията: } L \rightarrow L + dL = L(1 + \alpha_m \cdot dT)$$

α_g е т.к.р. (температурен коефициент на линейно разширение) на стъклото

α_m е т.к.р. на метала, от който са изработени гривните и тубусите на системата.

Т.к.р. α_i са различни за отделните материали и могат да бъдат както положителни, така и отрицателни. Тук е уместно да напомним също така, че т.к.р. на средите е в действителност нелинейна функция от температурата $\alpha = \alpha(T)$. Линейната апроксимация е само за определен, често пъти не много широк, температурен диапазон.

$$\text{Показателя на пречупване на стъклото е: } n \rightarrow n + dn = n + \frac{dn}{dT} \cdot dT$$

$$\text{Показателя на пречупване на въздуха е: } n_a \rightarrow n_a + dn_a = n_a + \frac{dn_a}{dT} \cdot dT$$

При $p = 760\text{mmHg}$, $n_a(T)$ е:

$$n_{at} - 1 = (n_{15} - 1) \cdot \left(\frac{1,0549}{1 + 0,00366 \cdot T} \right), \text{ където}$$

$$(n_{15} - 1) \cdot 10^8 = 8342,1 + \frac{2406030}{130 - \gamma^2} + \frac{15996}{38,9 - \gamma^2}$$

където е въведено означението $\gamma = \frac{1}{\lambda}$, λ [μm].

Пример 1: За единична леща:

$K = (n_g - n_a) \cdot (c_1 - c_2)$, където $n_a \rightarrow 1$ и

$$n_{gabs} = n_g \cdot n_a$$

$$\frac{dK}{dT} = \left(\frac{dn_g}{dT} \cdot n_a (\cong 1) - n_g \cdot \frac{dn_a}{dT} \right) \cdot (c_1 - c_2) + (n_g - n_a) \cdot \left(-\frac{1}{R_1^2} \cdot \frac{dR_1}{dT} + \frac{1}{R_2^2} \cdot \frac{dR_2}{dT} \right)$$

тъй като:

$$\frac{1}{R_1} \cdot \frac{dR_1}{dT} = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{dR_2}{dT} = \alpha_g$$

$$\frac{dK}{dT} = K \cdot \left[\frac{1}{n_g - n_a} \cdot \left(\frac{dn_g}{dT} - n_g \cdot \frac{dn_a}{dT} \right) - \alpha_g \right]$$

Ако въведем температурен коефициент на разширение за f , то:

$$\alpha_f = \frac{1}{f} \frac{df}{dT} = \alpha_g - \frac{1}{n_g - 1} \cdot \left(\frac{dn_g}{dT} - n_g \cdot \frac{dn_a}{dT} \right)$$

или $\frac{dK}{dT} = -K \cdot \alpha_f$.

Пример 2: Разширител на лазерен сноп (експандер): Нека разгледаме телескоп, състоящ се от положителен и отрицателен елемент. Той е познат като телескоп на Galileu или холандски далекоглед.

Ъгловото увеличение на телескопа е:

$$M = \left(-\frac{K_e}{K_o} \right)$$

$$u = h \cdot (K_o + K_e - D \cdot K_o \cdot K_e), \text{ от където следва } D = \frac{M-1}{M \cdot K_o},$$

при изпълнено условие за колимация, т.е. $u = 0$.

$$\frac{du}{dT} = h \cdot \left[\frac{dK_o}{dT} + \frac{dK_e}{dT} - \frac{dD}{dT} K_o K_e - D \frac{dK_o}{dT} K_e - D K_o \frac{dK_e}{dT} \right]$$

$$\frac{dK_o}{dT} = -K_o \alpha_o; \quad \frac{dK_e}{dT} = -K_e \alpha_e = (M K_o \alpha_e); \quad \frac{dD}{dT} = \alpha_m D$$

$$\therefore \frac{du}{dT} = -\frac{1}{2F} [M \alpha_o - \alpha_e - \alpha_m (M - 1)]$$

Числен пример:

Нека система с параметри:

$M = 10$, $F = 1,0$; и подложена на температурна разлика $\Delta t = 10^\circ\text{C}$,

е изработена от стъкло SF11 (Schott) с параметри:

$$\alpha_{gSF11} = 6,1 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{dn}{dT} = 11,40 \cdot 10^{-6}$$

$$n_{SF11} = 1.785$$

Разполагаме със следните материали за механичните детайли:

α_m за

$$\text{Al} = 23.6 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{инвар} = 0.9 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{лека магнезиева сплав} = 26.0 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{неръждаема стомана} = 10.4 \cdot 10^{-6}$$

Тогава за алуминий $\Delta u = 0.671 \text{ mrad}$!

Типична стойност за He-Ne лазер е разходимост около 3 mrad . Следователно, в дадения случай бихме имали 50%-на температурна грешка.

Термокомпенсация:

Искаме да бъде изпълнено условието :

$$M \cdot \alpha_o - \alpha_e - \alpha_m \cdot (M - 1) \stackrel{!}{=} 0$$

Тогава

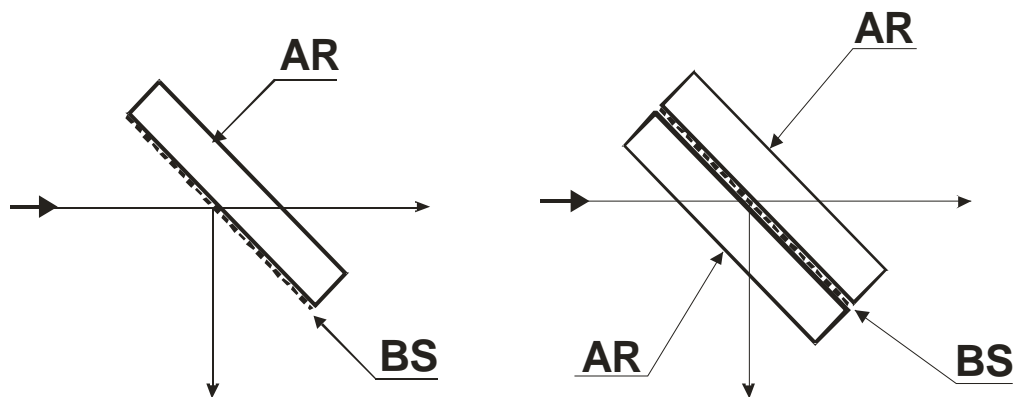
$$\alpha_e = - \alpha_m \cdot (M - 1) + M \cdot \alpha_o$$

5.6. Отражатели и светоделители

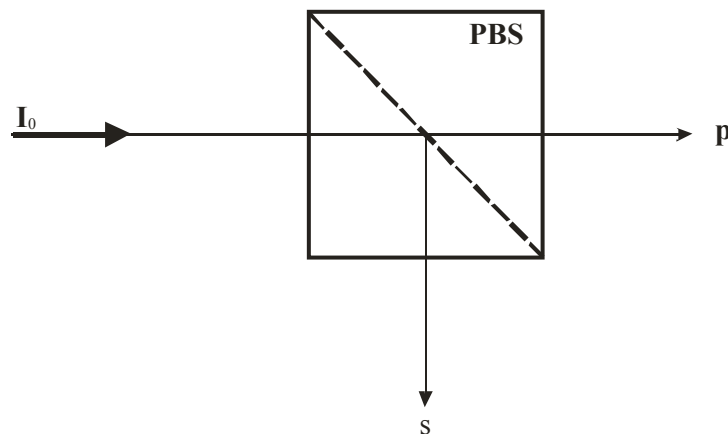
Размерите на оптичните елементи се определят със средствата на геометричната оптика. Толерансите (допуските) се разпределят между отделните елементи така, че те да бъдат технологично поносими и крайната деформация на вълновия фронт да бъде $< (\lambda/20)$. От тук произтичат строгите изисквания към главните оптични детайли на интерферометрите. Дебелината на подложките се избира с оглед тяхната температурна стабилност и е обикновено $(1/4)D_{\max}$, където D_{\max} е максималния размер на елемента. Закрепването на механичните елементи е задължително статически определено, без да внася никакви напрежения и деформации. Огледалата и светоделителите се монтират обикновено на три точки, най-често лежащи във върховете на правоъгълен триъгълник.

За фина трансляция на даден елемент (по-точно, на точка на контакт) се използва диференциален винт. Той представлява два винта, с различна по посока резби и различни стъпки на резбите. Единият служи едновременно за гайка на другия. Следователно, при един оборот, който благодарение на конструктивното решение се извършва едновременно от двата винта, единият се премества на разстояние равно на своята стъпка, а вторият също, но в обратна посока. Сумарната трансляция е равна на разликата в стъпките на винтовите резби.

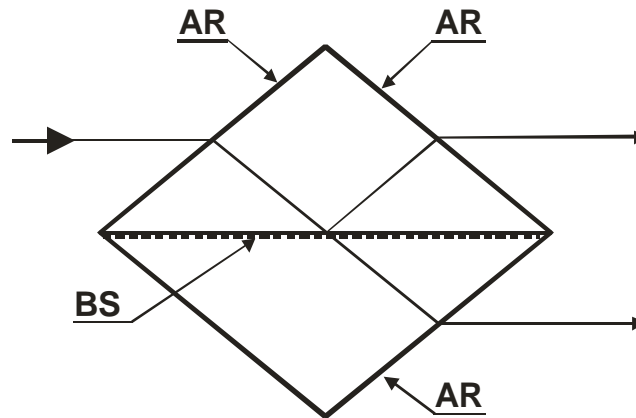
Светоделители: Най-често светоделителните отражателни покрития се нанасят върху планпаралелна или леко клиновидна пластина. Тя се използва или като самостоятелен елемент, или състояща се от две слепени пластини с цел защита на покритието. Върху външните повърхности са нанесени антирефлексни покрития.



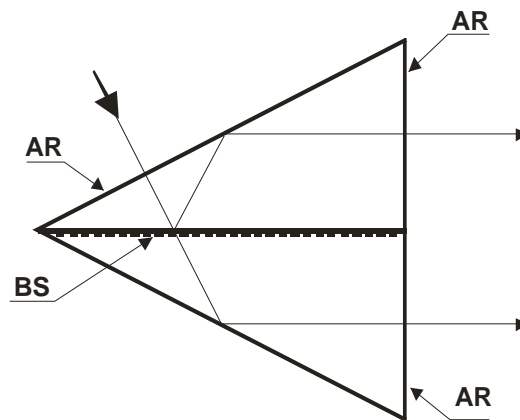
Светоделителен куб: Състои се от две правоъгълни, равнобедрени призми, слепени по хипотенузите, на едната от които е нанесен светоделителния слой. Могат да бъдат както поляризиращи, така и неполяризиращи. Недостатък на този светоделител са многократните вътрешни отражения между стените.



Ромбичен светоделител: По конструкция е подобен на делителния куб, но при него отсъстват многократните вътрешни отражения, тъй като паразитните отражения излизат от хода на лъчите.



Призма на Кьостерс (Kösters): Този светоделител се състои от две правоъгълни призми с ъгли $30 - 60 - 90^0$, слепени по големия катет, на единият от които е нанесено светоделителното покритие. Свободните чела са с подходящо подобрени антирефлексни покрития.



В качеството на отражатели се използват:

1. Равнинни огледала
2. Диедри (правоъгълни равнобедрени призми)
3. Ретро рефлектори

Ретро рефлекторите са три вида:

- a) ъгъл на куб, който се среща като кух или призма
- b) лещови (котешко око)
- c) огледални .

ad a) Изработват се от стъкло или топен кварц. Правите ъгли се изработват с висока точност. Ако отклонението им от правият ъгъл е δ , и то еднакво за всеки

от трите ъгла и в една и съща посока, то ъгловата девиация Δ на отражателя е винаги $\Delta \geq 6\delta$. Например: ако $\delta = 1''$, то $\Delta > 6''$.

Ъгълът на куб притежава интересни поляризационни свойства. Неговата матрица на Джонс има вида

$$M_0 = \begin{bmatrix} \frac{a}{8}[4b(b-a) - (a+b)^2] & \frac{b\sqrt{3}}{8}(a+b)^2 \\ \frac{a\sqrt{3}}{8}(a+b)^2 & \frac{b}{8}[(a+b)^2 + 4a(b-a)] \end{bmatrix}$$

където $a = \exp(i\delta_{\parallel})$, $b = \exp(i\delta_{\perp})$

са комплексните Френелови амплитудни коефициенти на отражение върху стените на призмата (за дадения случай – при пълно вътрешно отражение).

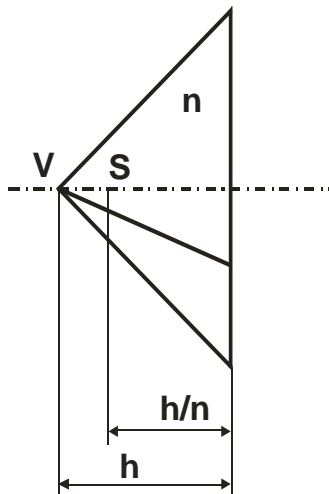
Ако завъртим призмата около оста z (нейната собствена оптична ос) на азимутален ъгъл α , то новият оператор ще бъде:

$$M = S(-\alpha).M_0.S(\alpha)$$

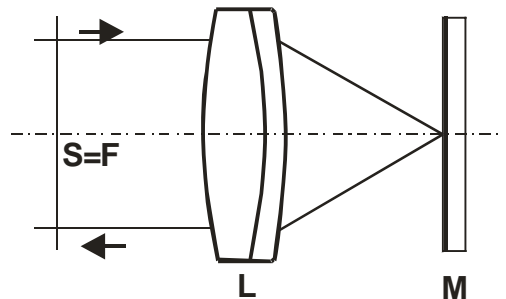
където $S(\alpha)$ е познатия оператор на ротация

$$S(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

От конструктивна гледна точка е важно да се знае оста, около която призмата може да бъде завъртана без това да води до промяна в разстоянието между двата снопа – входящ и изходящ. Това се постига единствено при ос на ротация, минаваща през оптичния център на ъгловия отражател. Например, при ъгловия отражател оптичният център е образът на върха му в равнината на базата (челната повърхност).



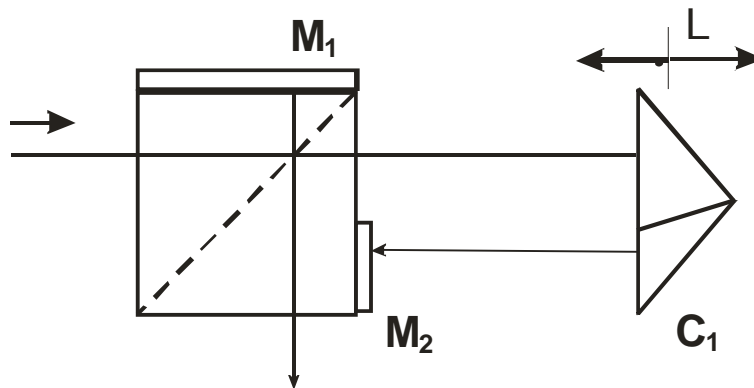
S е огледалния образ на върха V в челото на призмата.



S съвпада с предметния фокус F.

Напречното отместване на сноповете се елиминират в конструкцията на Terrien (1959 г.) – Фиг. 5.8, където опорният отражател е заменен с плоско

огледало M_1 и е добавено допълнителното равнинно огледало M_2 , което е също неподвижно.



Фиг. 5.8

Покрития:

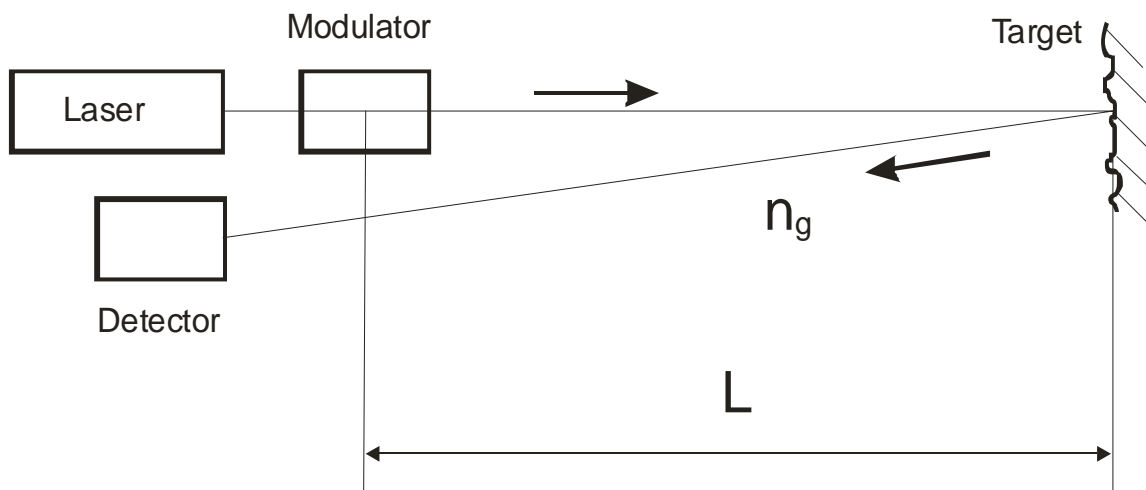
1. Метални: например *Al*, *Ag*, *Au*, *Rh*, сплави със защита от *SiO*.
2. Многослойни диелектрични:
 - За тесен спектрален диапазон. Те са най-често срещаните, тъй като тяхната цена е най-ниска.
 - За широк спектрален диапазон.
 - Поляризационни за различни области на спектъра.
 - Светоделителни, поляризационни и неполяризиращи.
 - С различни стойности на коефициента на отражение за различни честоти. Например: *Hot mirror* (топлинен рефлектор).
 - спектрално селективни отражатели.

6. ЛАЗЕРНА ТЕЛЕМЕТРИЯ

6.1 Фазови телеметри

Лазерната интерферометрия с нейната субмикронна чувствителност е неудобна за измерване на разстояния от порядъка на единици или десетки метри, а и на по-големи разстояния в свободната атмосфера и космоса. Основен ограничаващ фактор е силната оптическа нееднородност на атмосферата. Турбулентността, топлинните градиенти, непостоянният химичен състав, появата на акустични вълни и др. са част от факторите водещи до флукуациите в оптичната плътност на средата, а от там и до огромни вариации в стойността на оптичния път.

Най-известния метод за измерване на големи разстояния се основава на модулацията на лазерен сноп насочен към някаква мишена. За тази цел сега се използват He-Ne или GaAs лазери. В качеството на отражател се използва ретро рефлексор, който се поставя в точката, до която се измерва разстоянието. Като мишена може да служи и дифузна повърхност. Правени са измервания с отразен сигнал от водна площ, трева, здания, но по-силен и надежден сигнал се получава естествено от ретро рефлексор.



Фиг. 6.1

Отразеният от мишената сигнал се приема от телескопична система и се фокусира върху фотодетектор. Фазата на амплитудно модулирания сигнал отразен от мишената се сравнява с фазата на модулацията на излъчената светлина. Разликата във фазата се обуславя от факта, че времето за преминаване на сигнала от излъчвателя до машината и обратно до детектора е крайно по стойност. Фазовото изместване φ в зависимост от дължината L на трасето е:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (2n_g L),$$

където λ_0 е дължината на вълната на модулация, а n_g е груповия коефициент на пречупване.

За да се отчете въздействието на атмосферата, следва да бъде използван груповия коефициент на пречупване, вместо фазовия показател n :

$$n_g = n + \sigma \frac{dn}{d\sigma}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda_0}.$$

Двата показателя на пречупване се различават един от друг вследствие на това, че в среда с дисперсия (среда, за която $n = n(\lambda)$), груповата скорост V_g (скоростта, с която се разпространява енергията на съответната вълна) се различава от фазовата скорост (скоростта, с която се изменя фазата на вълната). В описаните по-горе интерференчни методи се използваше фазовата скорост (и съответно фазовия показател на пречупване), но за методите на телеметрията, базираща се на детекцията на енергията на модулиран сноп като по-удобен параметър се явява груповата скорост (и от там груповият n_g). Стойността на n_g за сух въздух при 15°C и 760 mmHg и концентрация на CO_2 равна на $0,03\%$ за

$$\lambda_0 = 0,63299138 \text{ } \mu\text{m} \text{ (He-Ne)} \text{ е } n_g = 1,0002845073$$

Мощността на изходящия сигнал е:

$$P_1(t) = P_{01}[1 + m \cos(\varpi_M t + \varphi_0)]$$

Приетата (детектираната) мощност на сигнала е:

$$P_2(t) = P_{02} \{1 + m \cos[\varpi_M (t - t_L) + \varphi_0 - \varphi_D + \varphi_A]\},$$

където t_L е времето за изминаване на разстоянието L , φ_D е фазовото изместване на отражението, φ_A е фазовото отместване, причинено от уреда.

Разстоянието L е:

$$n_g L = \frac{c}{2\varpi_M} \varphi_L$$

$$\varphi_L = \varpi_M t_L$$

$$n_g = \frac{c}{v_g}$$

$$k = \frac{\varpi}{c} N = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\varpi}{v}$$

Грешката на телеметъра е:

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{\Delta \varpi_M}{\varpi_M}$$

И този показател на пречупване е зависим от параметрите на атмосферата p , T и η . [виж Owens J.C., Appl. Opt., No6, **51**, (1967)].

Определянето на поправката към n_g в полеви условия е свързано с големи трудности. Фактически във формулата следва да се замести усреднена по трасето стойност. Ако повърхността на терена е еднородна и метеорологичните условия са стабилизирани, то ситуацията не е критична. Поправката може лесно да се определи, ако знаем разпределението на T и p по трасето. Това изисква предварителното им измерване на няколко места и усредняване. Това обаче отнема много време и не осигурява необходимата точност. Например, в планинските райони може да има големи разлики в n_g . Във връзка с това бе разработен друг метод за усредняване на n_g , базиращ се на неговото измерване за две дължини на вълната.

Самото измерване става чрез определянето на фазовата разлика ψ . Разликата във фазите може да се представи с израза:

$$\psi = (N + f)2\pi,$$

където N е цяло число, а $f < 1$ е правилна дроб. От едно измерване се получава информация за f , но не и за N . За това е необходимо да се правят серия измервания при няколко различни честоти на модулация. Най-напред се прави при най-ниска честота, за която $\psi < 2\pi$, т.е. $N = 0$, и се изчислява грубата стойност на разстоянието L . Обикновено измерването се прави многократно и стойността на ψ се осреднява.

Друга разновидност на фазовия телеметричен метод се базира на идеята на Физо: честотата на модулация на снопа нека се изменя плавно, докато двата сигнала се дефазират на 180° . Тогава фотодетектора дава нулев сигнал. При понататъшно увеличение на честотата на модулация ще следват и други стойности, за които сигнала е нулев. Отчитайки стойността на модулационната честота за всяка отделна точка на нулиране се изчислява разстоянието.

Върху отслабването на сигнала влияят следните фактори:

1. Обратното разсейване от атмосферата, което поражда шум във фотодетектора. До 3 км. над морското равнище преобладава аерозолното разсейване пред молекулярното.
2. Геометрични фактори, водещи до отслабване на излъчването \rightarrow апертурните свойства.
3. Вертикалният градиент на показателя на пречупване.

ad.1) Отслабване на сигнала причинено от разсейване в атмосферата:

Отслабването на интензитета на сигнала за един проход се дава със зависимостта

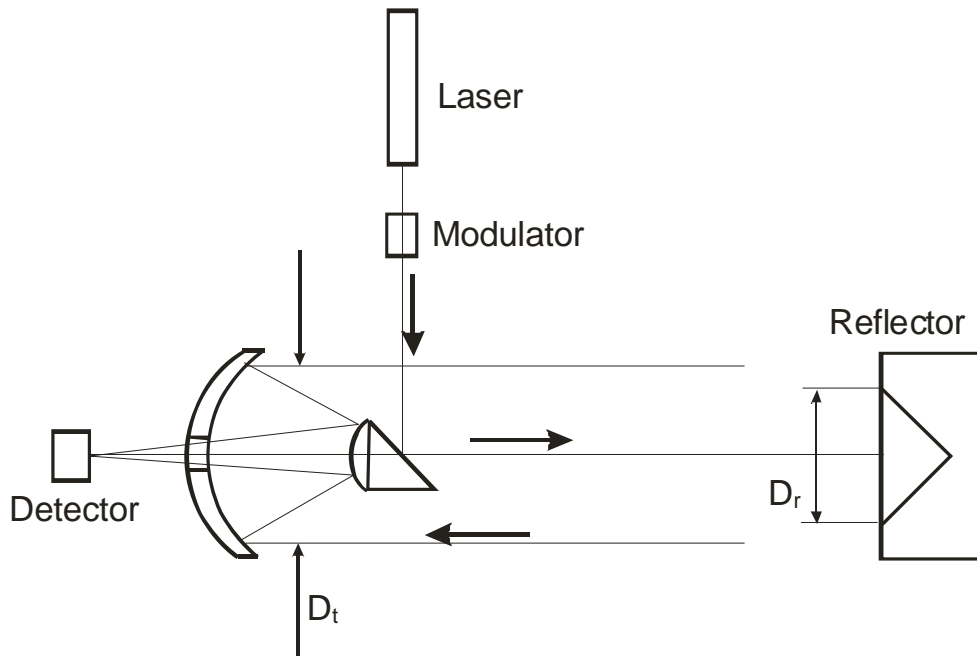
$$\frac{I}{I_0} = 10^{-2.10^{-6}.K.L} ,$$

където L е в [cm], а коефициентът на затихване K за две основни дължини на вълната е

$\lambda = 0.633 \mu\text{m}$	$K = 0.62 \text{ dB.km}^{-1}$
$\lambda = 0.350 \mu\text{m}$	$K = 1.10 \text{ dB.km}^{-1}$

ad. 2) Геометрично отслабване на сигнала

Установено е, че на разстояние $L = 5 - 45$ км, типичният ъгъл на разширение на лазерния сноп е $15-16 \mu\text{rad}$ през нощта, и около $60-100 \mu\text{rad}$ през деня. Ако тази разходимост, предизвикана от турбулентността на атмосферата, е голяма в сравнение с началната разходимост на снопа (която се определя от оптичните елементи на уреда), то пълната разходимост не зависи нито от апертурата на излъчвателя, нито от апертурата на отражателя. Ако излъчвания сноп е с мощност P_0 и разходимост α , то част от тази мощност след разстояние L попада във входната апертура на отражателя (който има радиус R_r). Отношението между отразената и излъчената мощност е (виж Фиг. 6.2):



Фиг. 6.2

$$P_t / P_0 = (D_r D_t)^2 / (\alpha L)^4 = 16 R_r^2 R_t^2 / (\alpha L)^4 .$$

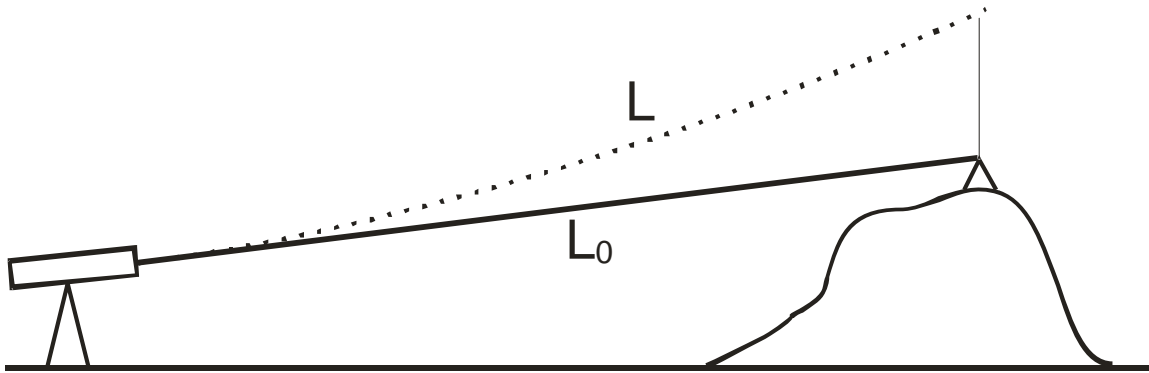
Например, ако диаметъра на зеницата обектива на телескопичната система е 20см, разходимостта на снопа е $\alpha = 50 \mu\text{rad}$ и разстоянието $L = 15\text{km}$, то отразеният сигнал, който ще приемем ще бъде само 0,54% от началната мощност P_0 .

ad 3). Един важен източник на грешка, който следва да бъде отчетен, е вертикалното разпределение на показателя на пречупване на атмосферата. Неговата стойност е обратно пропорционална на надморската височина. При подобно нехомогенно разпределение траекторията на лъча е крива линия – познатият ефект на пустинен мираж. Това налага предварителното познаването на вертикалният градиент на фазовия показател на пречупване. Като пример (виж Фиг. 6.3), една типична стойност за разстояние $L_0 = 25 \text{ km}$ е:

$$\frac{dn}{dh} = -3 \cdot 10^{-5} [\text{km}^{-1}],$$

следователно:

$$(L - L_0) / L_0 = 3 \cdot 10^{-8} .$$



Фиг. 6.3

Пример за интересно и поучително конструктивно решение е телеметърът с поляризационна модулация на фирмата Лайтц (*Ernst Leitz, Wetzlar*).

Принцип на измерване на разстояние

Разстоянието L се определя чрез измерване на фазовият ъгъл φ_r между излъчената и приетата вълна. Между фазовия ъгъл φ_r , закъснението t_r на сигнала и честотата на модулация на снопа f_0 са свързани помежду си с отношенията:

$$t_r = \varphi_r / 2\pi f_0$$

$$L = ct_r / 2 = c\varphi_r / 4\pi f_0$$

$$L_0 = N_0 c / 2f_0$$

Източникът е IR лазерен диод с дължина на вълната 780 nm и 1 mW изходна мощност. Паралелно на него е настроен червен лазерен диод за визуално насочване. Модулацията е поляризационна с външен LiTaO₃ кристален модулатор, работещ в диапазона 700 – 900 MHz. Детектирането на сигнала е диференциално. Измерваният диапазон е от 1.5 до 50 m с разделителна способност 1µm.

Схема на уреда:

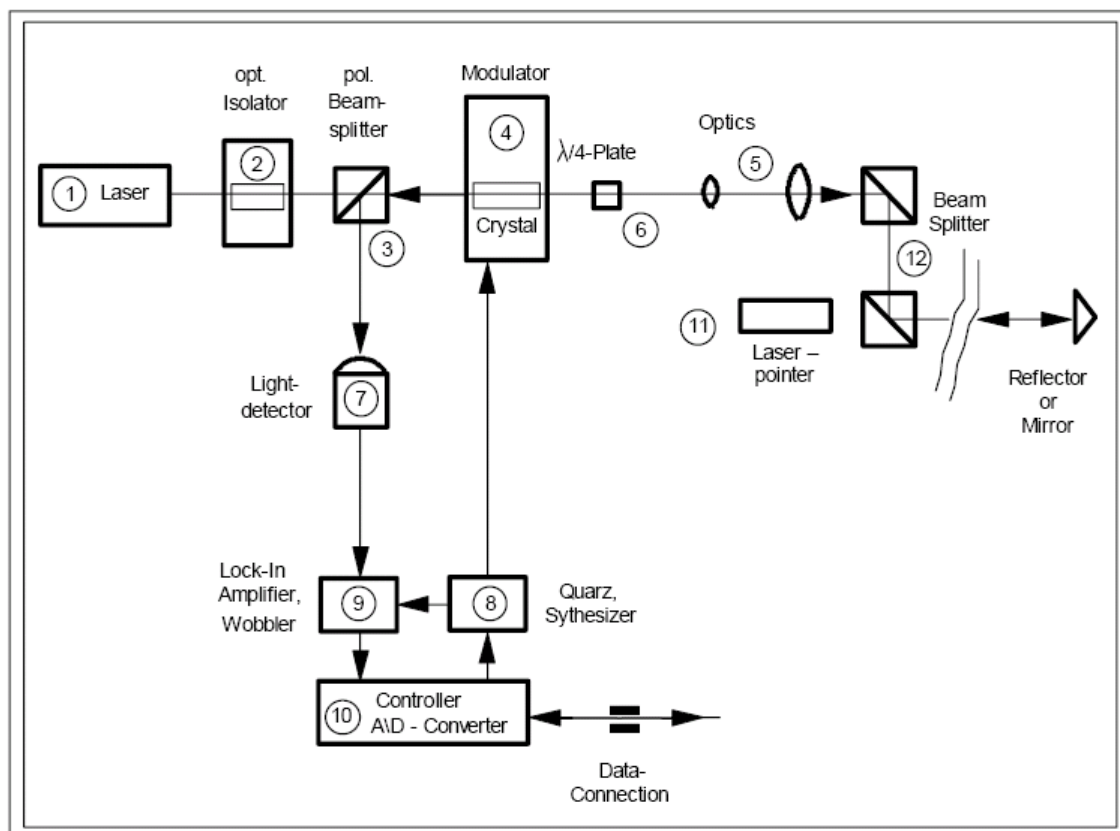
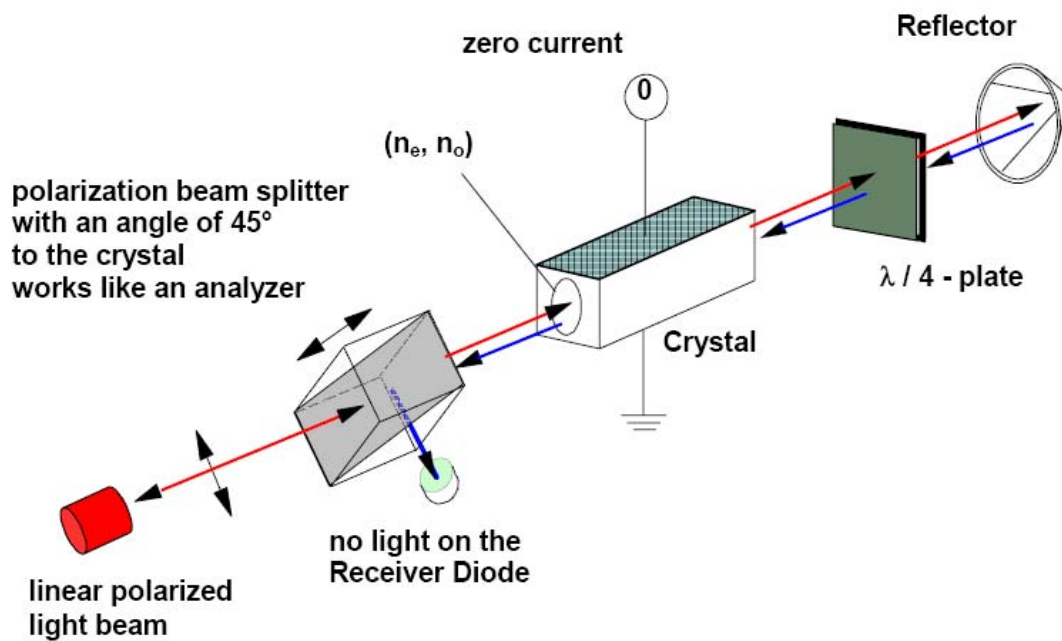
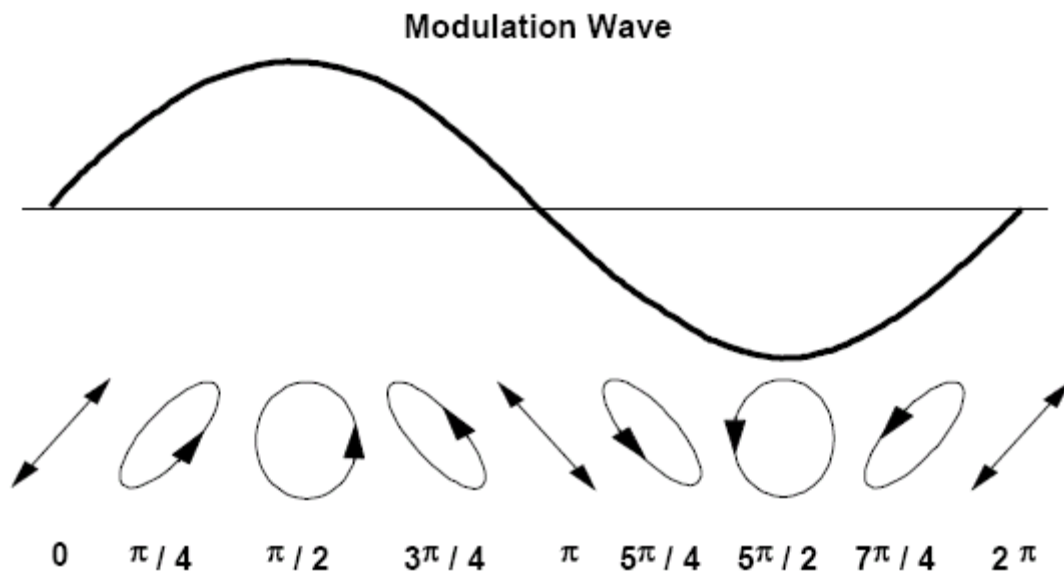


Схема на поляризационната модулация:

За един период на модулиращото напрежение полето преминава през серия поляризационни състояния.



Точността на измерването е пряко зависима от стойността на груповия показател на пречупване на въздуха в пространството между уреда и целта (отражателя). Емпиричната зависимост на този показател от параметрите на атмосферата е

$$N_{gr} = 0.3889479 \cdot p \cdot \left[\frac{1 + 10^{-6} \cdot p \cdot (0.817 - 0.0133 \cdot T)}{1 + 0.0036610 \cdot T} \right] - 556.68 \cdot 10^{-6} \cdot R \cdot 10^{\frac{7.5 \cdot T}{T + 237.3} + 0.6609}$$

където T е температурата на въздуха в [$^{\circ}\text{C}$]

p е налягането в [mm Hg]

R е относителната влажност в [%].

6.2 Лазерни Доплерови анемометри. Измерване на скорости на частици

Работата на лазерните Доплерови анемометри се основава на честотното отместване на светлина, разсеяна от движеща се повърхност – ефекта на Доплер. Ако единичният вектор на падащата вълна е \vec{k}_i , а на разсеяната \vec{k}_s и точката от повърхността върху която настъпва разсейването се движи със скорост \vec{v} , то съгласно ефекта на Доплер, честотното отместване е

$$\Delta \nu = (\vec{k}_s - \vec{k}_i) \cdot \vec{v} = \frac{2\pi\nu}{\lambda_0} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta .$$

7. ДИФРАКЦИЯ НА СВЕТЛИНАТА.

ВЪЛНОВА АБЕРАЦИЯ, ПРИМАРНИ ГЕОМЕТРИЧНИ АБЕРАЦИИ. ОСНОВИ НА ЛАЗЕРНАТА ДИФРАКТОМЕТРИЯ

7.1 Теоретични основи

Дифрактометричните методи са от особена важност за измерителното дело. Появата и разпространението на стабилни и достъпни лазерни източници, заедно с огромното развитие на електронната промишленост, доведе до бурно развитие и разпространение на този метод в множество области, например, в материалното производство, при мониторинг на процеси, свързани с експлоатацията на различни съоръжения, в биологията и медицината, за екологичен контрол и др.

Дифрактометричният метод се базира изцяло на явлението дифракция на светлината. С цел яснота и по-добро разбиране, ще бъде направен кратък преглед на основните теоретичните модели, служещи за качествено и количествено описание на това явление. В техническата оптика се прилага основно теорията на Френел-Кирхоф, както и нейното развитие, теорията на Рейли-Зомерфелд.

Исторически бележки:

1. (1452-1519) *Leonardo da Vinci* – за първи път споменава за явлението дифракция
2. Първите точни наблюдения на дифракция на слънчева светлина върху железен прът и мрежа описва Грималди, *Francesco Maria Grimaldi* (1618-1663), през 1665 година.
3. Дифракцията остава необяснена теоретически до началото на миналия век. Първият опит за обяснение на дифракцията е направен от Хюйгенс, *Christian Huygens* (1629-1695), който преди това, с помощта на вълновата теория, успява да обясни праволинейното разпространение на светлината (принцип на Хюйгенс). Но той не успява, макар да е знаел за опитите на Грималди.
4. Решението на проблема се отдава на Френел, *H. J. Fresnel*, който свързва принципа на Хюйгенс с принципа на интерференция на Юнг, *Thomas Young* (1773-1829), и получава за това си постижение наградата на Парижката Академия през 1818 г., която е била обявена по инициатива на защитниците на корпускулярната теория. Теорията, която е разработил Френел, е известна днес като Хюйгенс-Френелова теория. Тя получава по-точна математическа формулировка от Кирхоф, *Gustav Robert Kirchhoff* (1824-1887), през 1882 г. Така се стига до теорията на Френел-Кирхоф. Математическите противоречия в тази теория са отстранени по-късно от Арнолд Зомерфелд, *Arnold Sommerfeld* (1868-1951). Този модел е познат като теорията на Рейли – Зомерфелд (*Rayleigh-Sommerfeld*). Зомерфелд успява да реши някои специални случаи на дифракция чрез пряка интеграция на уравненията на Максвел.

Според Хюйгенс-Френеловата теория разпределението на интензитета на полето върху екрана на наблюдение S_2 е резултат от интерференцията на всички вторични (секундарни) сферични вълни, източници на които са точките, лежащи в отвора A на екрана S_1 . Но лесно може да се установи по експериментален път, че

ако наблюдаваме отвора A от точка, лежаща в геометричната сянка, ръбът му свети. Това е било забелязано още от *Th. Young* (1802). Той се опитал да обясни явлението дифракция чрез вълновата теория като предположил, че полето в S_2 е резултат от суперпозицията на вълната, падаща върху отвора A , с вълна отразена от ръба на A , т.е. с краевата (граничната) вълна. Тази идея, в резултат от големия успех на Хюйгенс-Френеловата теория, е била забравена за доста дълго време. Едва през 1883 г. Ги, *L. George Gouy* (1854-1926), и през 1885 г. Вин, *Wilhelm Wien* (1864-1928), са наблюдавали гранична вълна при светлина дифрактирала под голям ъгъл. През 1888 г. Маги, *G. A. Maggi*, установява, че дифракционният интеграл на Кирхоф може да бъде разделен на две части: една геометрико-оптична и една вълнова, с произход от ръба на отвора A . Същото откритие прави и Адалберт Рубинович, *Adalbert Rubinowicz*, независимо от Маги. Също и Арнолд Зомерфелд намира в точното решение за дифрактирала вълна върху безкрайна отражателна полуравнина член, отговарящ на граничната вълна на Юнг. По този начин е била доказана идентичността между Френеловото и Юнговото схващане за дифракцията на светлината. Идеята за граничната вълна е била разширена от Миямото и Волф, *K. Miyamoto* и *Emil Wolf* (1962), и накрая от Такаши Сузуки, *Takashi Suzuki* (1971). Според Сузуки източник на обобщена гранична вълна е всяка точка от екрана S_1 , в която градиента на оптичната плътност е ненулев.

За целите на настоящият курс ще бъде използвана формулата на Френел-Кирхоф, тъй като тя осигурява достатъчна точност при задачите, които са предмет на разглеждане. Съгласно тази теория, комплексната амплитуда на полето в дадена точка P се дава с израза

$$u_p = -\frac{ik}{4\pi} \int_{\sigma} A \frac{e^{ik(s+r)}}{r.s} [\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{s})] d\sigma \quad /7.1/$$

където повърхността на интеграция σ се състои от три части (Фиг. 7.2):

$$\sigma = A + B + C,$$

A – отворът в екрана,

B – останалата част от екрана,

C – сфера с център в точка P и радиус R_C , обхващаща P и стигаща до екрана B .

Тази стойност на u_p е за граничния случай, когато $R_C \rightarrow \infty$.

Тази формула е валидна, ако са изпълнени следните условия на Кирхоф:

- 1) предполагаме, че върху B и C комплексната амплитуда на полето, както и нейните частни производни в посока на външната нормала клонят към нула. Което води до първото математическо противоречие: съгласно теоремата на Хайнрих Вебер за потенциала, в дадения случай последният би следвало да бъде идентично равен на нула в целият обем, затворен от повърхността σ .
- 2) наличието на екрана не влияе върху полето в точките от отвора A . С други думи, във всяка точка от областта A , комплексната амплитуда на полето, създадено от източника P_0 , не зависи от присъствието на екрана

S. И това предположение е *най-често в противоречие* с физическата реалност – по-точно, то е добре изпълнено само далече от граница на отвора A, а близо до нея не е изпълнено. Този факт е оживил идеята за граничната вълна.

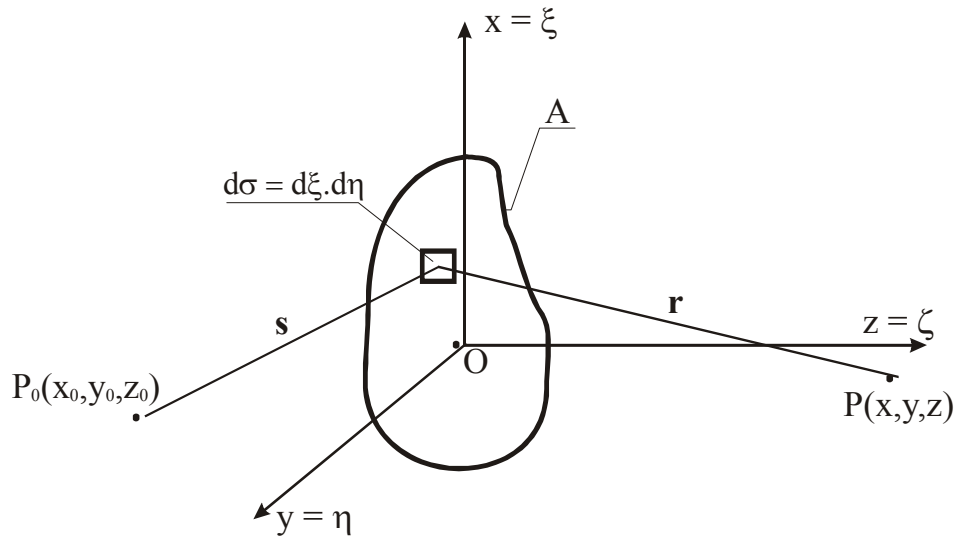
7.2. Класификация на дифракционните явления

Формулата на Френел–Кирхоф е изведена за дифракция на сферична монохроматична вълна върху равнинен екран. Ако въведем някои допълнителни опростявания, които обаче са в съответствие с физичната реалност, върху която се изграждат уредите, ще стигнем до някои по-прости и широко използвани резултати.

Предполагаме, че точката на наблюдение P е близо до геометричната сянка, т. е. $\overline{P_0P}$ минава близо до ръба на екрана.

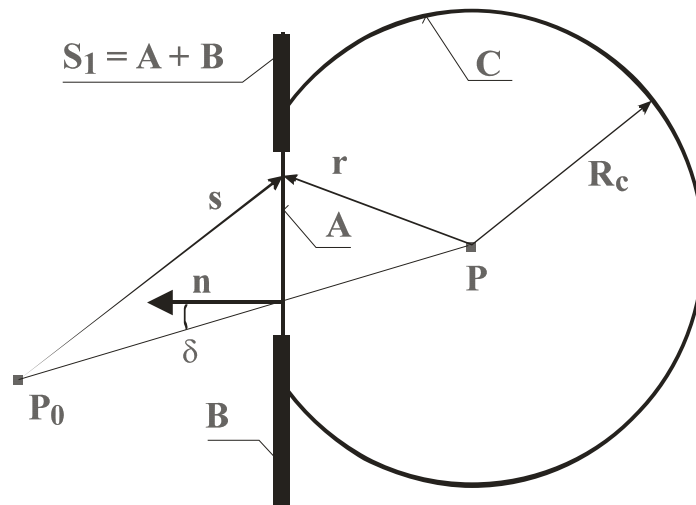
Освен това, ще предполагаме, че ъглите между радиус-векторите \mathbf{s} и \mathbf{r} са малки за всички точки Q върху A и, че P_0 и P са отдалечени от екрана.

Избираме координатната система (O,x,y,z) така, че екранът S_1 с отвора A да лежи в равнината (x,O,y). С цел удобство при интеграцията, положението на площния елемент $d\sigma$ ще представим в друга координатна система: $\xi \equiv x$, $\eta \equiv y$. (тъй като интеграцията се простира само върху областта A).

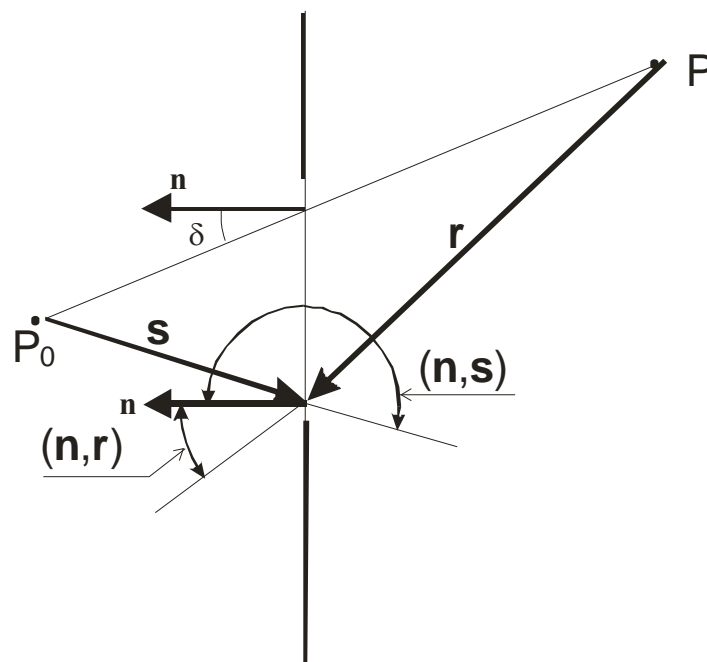


Фиг. 7.1

Нека δ бъде ъгълът между ориентираната отсечка $\overline{PP_0}$ и нормалата \mathbf{n} към екрана S_1 ; тогава:



Фиг. 7.2



Фиг. 7.3

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \cong \cos \delta$$

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{s}) \cong \cos(180^\circ - \delta) = -\cos \delta'$$

/7.2/

като също така $r \cdot s \cong R_0 \cdot R$.

Така получаваме една опростената форма на формулата на Френел-Кирхоф:

$$u_p = -\frac{ik}{2\pi} \frac{A \cos \delta}{R_0 R} \int_A e^{ik(r+s)} d\sigma \quad /7.3/$$

За изчисляването на този интеграл трябва да знаем r и s :

$$\begin{aligned} r^2 &= (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2 & R^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ s^2 &= (x_0-\xi)^2 + (y_0-\eta)^2 + z_0^2 & R_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \end{aligned} \quad /7.4/$$

Или:

$$r^2 = R^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2(x\xi + y\eta) \Rightarrow r = R \left[1 + \frac{\xi^2 + \eta^2 - 2(x\xi + y\eta)}{R^2} \right]^{1/2} \quad /7.5/$$

$$s^2 = R_0^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2(x_0\xi + y_0\eta) \Rightarrow s = R_0 \left[1 + \frac{\xi^2 + \eta^2 - 2(x_0\xi + y_0\eta)}{R_0^2} \right]^{1/2} \quad /7.6/$$

Нека изразите за разстоянията r и s развием в ред на Мак Лорен:

$$r = R + \frac{1}{2} \frac{\xi^2 + \eta^2}{R} - \frac{x\xi + y\eta}{R} + \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{[\xi^2 + \eta^2 - 2(x\xi + y\eta)]^2}{2R^3} + \dots \quad /7.7/$$

$$s = R_0 + \frac{1}{2} \frac{\xi^2 + \eta^2}{R_0} - \frac{x_0\xi + y_0\eta}{R_0} + \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{[\xi^2 + \eta^2 - 2(x_0\xi + y_0\eta)]^2}{2R_0^3} + \dots \quad /7.8/$$

Следователно можем да пишем

$$r + s = R + R_0 + \phi(\xi, \eta) \quad /7.9/$$

където

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) &= -\xi(l-l_0) - \eta(m-m_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[(\xi^2 + \eta^2) \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) - \frac{(\xi l_0 + \eta m_0)^2}{R_0} - \frac{(\xi l + \eta m)^2}{R} \right] + \dots \end{aligned} \quad /7.10/$$

Тук сме въвели съответните означения за направляващите косинуси

$$l = \frac{x}{R}, \quad l_0 = -\frac{x_0}{R_0}$$

$$m = \frac{y}{R}, \quad m_0 = -\frac{y_0}{R_0}$$
/7.11/

на лъчите \overline{OP} и $\overline{P_0O}$ спрямо осите x и y . Тогава, ако заместим в интеграла на Френел-Кирхоф, ще получим

$$u_p = -\frac{ik \cos \delta}{2\pi} \cdot \frac{Ae^{ik(R+R_0)}}{RR_0} \iint_A e^{ik\phi(\xi,\eta)} d\xi d\eta$$
/7.12/

Този интеграл значително се опростява, ако във $\phi(\xi,\eta)$ останат само линейните елементи. Това би могло да бъде така, ако имаме основание да считаме, че

$$\frac{1}{2} \left| \left(\xi^2 + \eta^2 \right) \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) - \frac{(\xi l_0 + \eta m_0)^2}{R_0} - \frac{(\xi l + \eta m)^2}{R} \right|_{\max} \ll \lambda$$
/7.13/

(Контролен въпрос: Защо спрямо λ ?)

Това изискване е изпълнено в следните случаи:

А. Когато едновременно разстоянията $R, R_0 \rightarrow \pm \infty$,

Б. Когато е изпълнено

$$\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} = 0$$
/7.14/

и едновременно с него

$$l^2, m^2 \ll \frac{|R|\lambda}{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}} \quad l_0^2, m_0^2 \ll \frac{|R_0|\lambda}{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}},$$
/7.15/

Г. Когато

$$|R_0| \gg \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}}{\lambda} \quad \text{и} \quad |R| \gg \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{\max}}{\lambda}$$
/7.16/

Когато тези условия са изпълнени, говорим за **дифракция в далечната зона** или за **дифракция на Фраунхофер**.

В случаите, когато в развитието на фазовата функция сме длъжни да включим и членовете от втори ред, казваме, че имаме **дифракция на Френел**.

7.3. Дифракция на Фраунхофер

Интегралът на Френел-Кирхоф ще се опрости още, ако въведем редуцираните координати на точка Р спрямо точка P_0 :

$$u = \frac{l - l_0}{\lambda} = \frac{a}{\lambda}; \quad v = \frac{m - m_0}{\lambda} = \frac{b}{\lambda} \quad /7.17/$$

Тези координати имат размерност $[m^{-1}]$ и се наричат пространствени честоти.

Ако положим

$$C = -\frac{ikA \cos \delta \exp[ik(R + R_0)]}{2\pi RR_0} \quad /7.18/$$

и, ако въведем функцията на комплексната амплитудната пропускливост $f(\xi, \eta)$ на екрана А като

$$f(\xi, \eta) = \frac{u(\xi, \eta)}{u_0(\xi, \eta)} = |f(\xi, \eta)| \exp\{i \arg[f(\xi, \eta)]\} \quad /7.19/$$

където $u(\xi, \eta)$ е комплексната амплитуда на полето, непосредствено след екрана, а $u_0(\xi, \eta)$ е комплексната амплитуда на полето непосредствено пред екрана

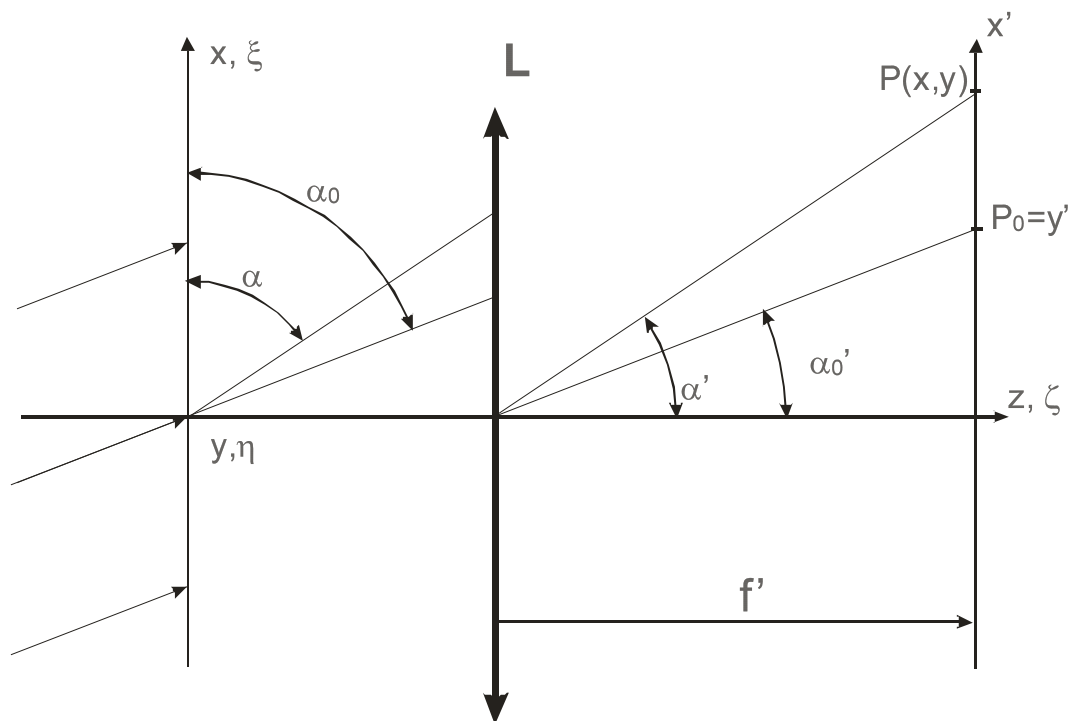
$$\begin{cases} f(\xi, \eta) = 1, & (\xi, \eta) \in A \\ f(\xi, \eta) = 0, & (\xi, \eta) \notin A \end{cases} \quad /7.20/$$

то интегралът на Френел-Кирхоф добива вида:

$$u_P(u, v) = C \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) e^{-i2\pi(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta = C \cdot FT\{f(\xi, \eta)\} \quad /7.21/$$

За практически изчисления е по-добре да изразим пространствените координати u и v чрез правоъгълните декартови координати в равнината на наблюдение.

Например:



Фиг. 7.4

$$\begin{aligned} l_0 &= \cos \alpha_0 = \sin \alpha'_0 & m_0 &= \cos \beta_0 = \sin \beta'_0 & /7.22/ \\ l &= \cos \alpha = \sin \alpha' & m &= \cos \beta = \sin \beta' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= l - l_0 = \sin \alpha' - \sin \alpha'_0 = \alpha' - \alpha'_0 & /7.23/ \\ b &= m - m_0 = \sin \beta' - \sin \beta'_0 = \beta' - \beta'_0 \end{aligned}$$

и, ако бъде въведена координатна система (x', y') с начало в точка P_0 , то

$$\begin{aligned} x' &= f' a & y' &= f' b \\ u &= \frac{x'}{\lambda f'} & v &= \frac{y'}{\lambda f'} \end{aligned} \quad /7.24/$$

7.4. Дифракция на светлината върху правоъгълен отвор

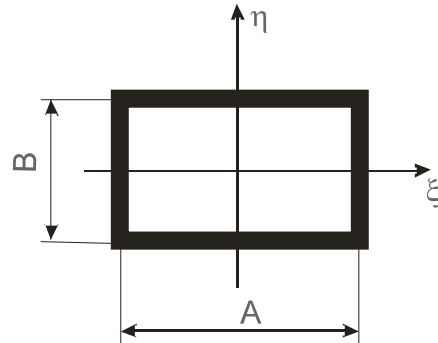
В този случай комплексната амплитудна функция на пропускане, съответно, комплексната амплитуда на полето и неговия интензитет, са

$$f(\xi, \eta) = \Pi\left(\frac{\xi}{A}\right) \Pi\left(\frac{\eta}{B}\right)$$

$$u_p = c.A.B.\text{sinc}(uA).\text{sinc}(uB)$$

/7.25/

$$I_p = I_0.\text{sinc}^2(uA).\text{sinc}^2(uB)$$



Фиг. 7.5

Нулите в разпределението на интензитета са за стойностите на пространствената честота

$$u = \frac{j}{A}; \quad v = \frac{j}{B}; \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots$$

/7.26/

Ъгловото разстояние между два съседни минимума е

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda}{A}; \quad \Delta\beta = \frac{\lambda}{B},$$

/7.27/

а линейното разстояние между съседните минимума е

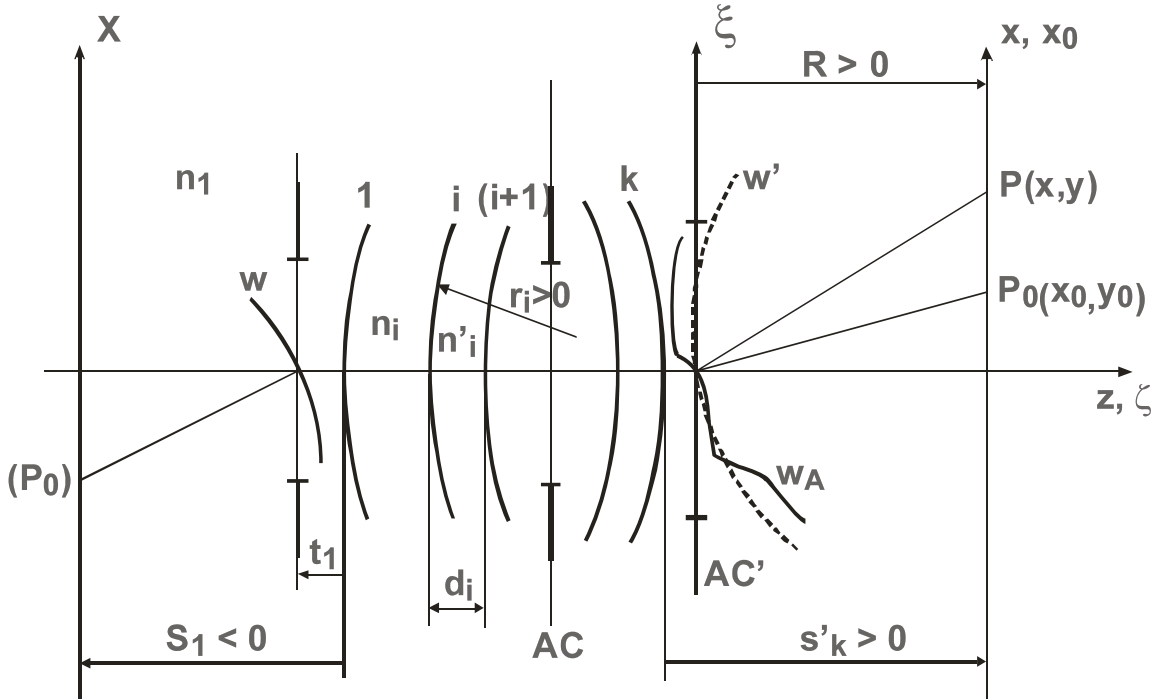
$$\Delta x' = f' \Delta\alpha = f' \frac{\lambda}{A}, \quad \Delta y' = f' \Delta\beta = f' \frac{\lambda}{B}.$$

/7.28/

7.5. Дифракционна теория на оптичното изобразяване

При това разглеждане ще бъде използван класическия метод на П. Дюфе и Ж. Лансро (1945 г.) (*P. M. Duffieux, G. Lansraux*).

Квазимонохроматичният, точков и изотропен източник (P_0), Фиг. 7.6, излъчва сферична вълна w , която постъпва в центрирана система от ротационни повърхнини с оптична ос z . Параксиалния образ на източника (P_0) лежи в точка $P_0(x, y)$ върху образната равнина (x, y) . Ако системата бе идеална, то тя би



Фиг. 7.6

трансформирала сферична разходяща вълна w в сферичната и сходяща w' , с център в точка $P_0(X, Y)$ - параксиалният образ на предмета (P_0). Сферата w' се нарича **Гаусова опорна сфера** и има фундаментално значение при оценката на вълновата aberация на оптичната система. При напречното увеличение между спрегнатите равнини на системата M , координатите на параксиалния образ P_0 ще бъдат

$$x_0 = MX \quad y_0 = MY \quad /7.29/$$

Тези две величини се наричат нормирани координати на предметната точка (P_0). Но, когато системата притежава aberации, aberирания изходящ вълнов фронт W_A вече не е сферичен. Именно тази aberирана вълна дифрактира на изходната зеница на оптичната система и дифракционното поле от нея създава разпределението на комплексната амплитуда, а от там и на интензитета, в образното пространство. Оказва се, че тази дифракционна задача може да бъде решена аналогично на задачата за дифракция на сферичната вълна W' върху екран. За тази цел е достатъчно да бъде въведена функцията на амплитудна пропускливост на изходната зеница (или съкратено функция на зеницата) на оптичната система, като:

$$f(x_0, y_0, \xi, \eta) = \frac{u_A(x_0, y_0, \xi, \eta)}{u_D(x_0, y_0, \xi, \eta)} \quad /7.30/$$

където u_A е комплексната амплитуда на полето непосредствено зад изходната зеница $(AC)'$ на аберираната система, а u_D е комплексната амплитуда на полето непосредствено пред зеницата $(AC)'$ за идеалната система. По този начин абериационното влияние на системата като цяло е съсредоточено само в една равнина – тази на изходната зеницата. Тъй като аберациите зависят от положението на (P_0) , то тази функция е зависима и от (x_0, y_0) . От дефиницията е видно, че

$$f(x_0, y_0, \xi, \eta) = 0 \text{ извън } (AC)' \quad /7.30a/$$

Комплексната амплитуда на полето в произволна пробна точка $P(x, y)$ може да бъде изчислена от дифракционния интеграл за далечната зона:

$$u_p(x, y, x_0, y_0) = C \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0, \xi, \eta) e^{-i2\pi(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta \quad /7.31/$$

където величините

$$u = \frac{x - x_0}{\lambda R} = \frac{x'}{\lambda R}; \quad v = \frac{y - y_0}{\lambda R} = \frac{y'}{\lambda R} \quad /7.32/$$

са редуцираните координати на точка P спрямо точка P_0 (нека за простота $f' = R$). Комплексната константа C характеризира от една страна мощността на източника (P_0) , а от друга съдържа фазов член, отговарящ на разликата в пътищата $(\overline{OP} - \overline{OP_0})$. Появата на този фазов член се дължи на факта, че точките P_0 и P не лежат на една сфера с радиус R , което е едно от условията за Фраунхоферова дифракция. Но този член не би повлиял съществено комплексната амплитуда в т. P , ако P и P_0 са слабо отдалечени една от друга и лежат близо до оптичната ос. **При добра корекция на оптичната система, т.е. когато $(\overline{OP} - \overline{OP_0}) \ll \lambda$, това предположение е спазено много добре.** Тогава при малки стойности на x' интензитетът в точка P е практически равен на нула.

Горната формула дава разпределението на комплексната амплитуда в околността на точката P , лежаща в околността на идеалния образ P_0 . От практически съображения, тъй като това разпределение зависи също и от комплексната константа C , се въвежда т. н. амплитудна функция на разсейване на точка:

$$w(x_0, y_0, x, y) = \frac{1}{(\lambda R)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0, \xi, \eta) e^{-i2\pi(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta \quad /7.33/$$

и тогава

$$u_p(x_0, y_0, x, y) = C.(\lambda R)^2 w(x_0, y_0, x, y) \quad /7.34/$$

До тук бе разгледано изобразяването на точков източник. Нека сега преминем към изобразяване на площен, пространствено кохерентен източник. Ако този източник бъде разбит на множество елементарни източници ΔS_j , като за всеки от които може да се предположи, че излъчва сферична вълна и, ако $u_0(x_0, y_0)$ описва разпределението на комплексната амплитуда в предметната равнина (в нормирани координати x_0, y_0), то елементарният източник ΔS_j с център в т. P_0 ще предизвика в пробната точка P поле с амплитуда

$$(u_p)_j = C_j(\lambda R)^2 w_j(x_0, y_0, x, y) = C_1 \cdot \Delta S_j u_{0j}(x_0, y_0) w_j(x_0, y_0, x, y) \quad /7.35/$$

Резултантната амплитуда в т. P , съгласно принципа за суперпозиция, е

$$u_p = \sum_j (u_p)_j, \quad /7.36/$$

и, ако оставим елементите от източника да клонят по размер към нула, то

$$(\Delta S_j = (\Delta x_0 \Delta y_0)_j \rightarrow dx_0 dy_0) \quad /7.37/$$

$$u_p(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0, y_0) w(x_0, y_0, x, y) dx_0 dy_0$$

(константата C_1 ще пропуснем, тъй като се интересуваме от пропорционалността); равенството димензионално се запазва.

Изопланатична област е тази област от образната равнината (x, y) , в която стойността на функцията на изходната зеница не зависи от координатите на параксиалния образ на предметната точка P_0 , лежаща някъде вътре в областта. Тогава *амплитудната функция на разсейване на точка (APSF)* зависи само от u и v , следователно само от разликите $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$. Или

$$u_p(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0, y_0) w(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 = u_0(x, y) * w(x, y) \quad /7.38/$$

Кохерентната оптическа предавателна функция (**COTF**) на оптичната система се дефинира като отношението между $F.T.^{+i}(u_p)$ към $F.T.^{+i}(u_0)$

$$\tilde{w}(v, \mu) = \frac{\tilde{u}(v, \mu)}{\tilde{u}(v, \mu)} \quad /7.39/$$

От теоремата на конволюцията:

$$\tilde{u}_p(\nu, \mu) = \tilde{u}_0(\nu, \mu) * \tilde{w}(\nu, \mu) \quad /7.40/$$

Извод 1: Кохерентната оптическа предавателна функция е Фурие образ на амплитудната функция на разсейване на точка.

$$\tilde{w}(\nu, \mu) = FT^{+i} \{w(x, y)\} \quad /7.41/$$

Ако в равнината на изходната зеница (AC) въведем редуцираните координати

$$\nu = \frac{\xi}{\lambda R} \text{ и } \mu = \frac{\eta}{\lambda R}, \quad /7.42/$$

то за **APSF** може да пишем:

$$w(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0, \nu\lambda R, \mu\lambda R) e^{-i2\pi(\nu x' + \mu y')} d\nu d\mu$$

$$f(x_0, y_0, \nu\lambda R, \mu\lambda R) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x', y') e^{i2\pi(\nu x' + \mu y')} dx' dy' \quad /7.43/$$

$$\therefore \tilde{w}(\nu, \mu) = f(x_0, y_0, \nu\lambda R, \mu\lambda R)$$

Извод 2: Кохерентната предавателна функция се равнява на функцията на зеницата, записана в редуцирани координати.

Например: За система с правоъгълна апертура

$$w(\nu, \mu) = \Pi\left(\frac{\nu\lambda R}{A}\right) \Pi\left(\frac{\mu\lambda R}{B}\right) \quad /7.44/$$

От тук става ясно, че, например в посока на оста x , системата не може да пропусне пространствени честоти, по високи от $(A/2R\lambda)$.

7.6. Пространствено-честотни свойства на една оптичната система. Оптическа предавателна функция ОТФ. Модулационно предавателна функция МТФ. Фазова предавателна функция РТФ.

До този момент предполагаме, че източникът е кохерентен.

Ако предметът е некохерентен, то отделните дифракционни картини не интерферират помежду си, а само се наслагват (сумират) по интензитет. Тогава резултантният интензитет в точката на измерване P ще бъде

$$I_p(x_0, y_0, x, y) = C_2 \cdot |W(x_0, y_0, x, y)|^2 \quad /7.45/$$

константата C_2 е пропорционална на мощността (на енергията или излъчвателната способност) на източника.

$I_p(x_0, y_0, x, y)$ се нарича **функция на разсейване на точка (PSF)**.

Тъй като тя зависи от константата C_2 , от чисто практически съображения се въвежда **нормирана PSF**:

$$w(x_0, y_0, x, y) = \frac{I_p}{\iint_{-\infty}^{\infty} I_p(x_0, y_0, xy) dx dy} = \frac{|W(x_0, y_0, xy)|^2}{\iint_{-\infty}^{\infty} |W(x_0, y_0, xy)|^2 dx dy} \quad /7.46/$$

Нейната размерност е $[m^{-2}]$ и тя описва относителното разпределение на интензитета в околността на образа на точка.

Ако системата изобразява пространствен (в частност площен) предмет с разпределение на интензитета $I_0(x_0, y_0)$, отново го разбиваме на елементарни източници с площ ΔS_j . От точка $P_{0j}(x_0, y_0)$ в центъра на елемента ΔS_j се излъчва поле, което в пробна точка $P(x, y)$ ще осигури интензитет приблизително равен на $I_{pj} = W_j(x_0, y_0, x, y) I_0(x_0, y_0) \Delta S_j$. Тогава, в граничен преход при $\Delta S_j \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$, сумарният интензитет в пробната точка $P(x, y)$ ще бъде:

$$I_p(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_0(x_0, y_0) W(x_0, y_0, x, y) dx_0 dy_0 \quad /7.47/$$

И отново, в рамките на една изопланатичната област

$$I_p(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_0(x_0, y_0) W(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 = I_0(x, y) * W(x, y) \quad /7.48/$$

Оптическата предавателна функция (**OTF**) на една оптична система се дефинира с отношението:

$$\tilde{W}(v, \mu) = \frac{\tilde{I}_p(v, \mu)}{\tilde{I}_0(v, \mu)} \quad /7.49/$$

Извод 3: Оптическата предавателна функция е Фурие образ на нормираната функция на разсейване на точка (PSF).

$$\tilde{W}(v, \mu) = FT^{+i} \{W(x - x_0, y - y_0)\} \quad /7.50/$$

Извод 4: От теоремата за Фурие образа на нормираната авто-корелационната функция следва, че оптичката предавателна функция се равнява на нормираната авто-корелация на кохерентната предавателна функция :

$$\tilde{W}(v, \mu) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(v', \mu') \tilde{w}^*(v' - v, \mu' - \mu) dv' d\mu'}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(v', \mu') \tilde{w}^*(v', \mu') dv' d\mu'} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y) e^{+i2\pi(vx - \mu y)} dx dy$$

..... /7.51/

Оптичката предавателна функция е комплексна функция от реални променливи (пространствените честоти v и μ). Следователно, може да бъде представена във вида

$$\tilde{W}(v, \mu) = |\tilde{W}(v, \mu)| \cdot \exp[i \arg(\tilde{W}(v, \mu))]$$

или

/7.52/

$$OTF(v, \mu) = MTF(v, \mu) \cdot \exp[iPTF(v, \mu)]$$

Функцията $MTF(v, \mu)$ се нарича **модуляционно предавателна функция** (или функция на пренос на контраста) на оптичната система, а функцията $PTF(v, \mu)$ - **функция на пренос на фазата** или фазово-предавателна функция. Тези две функции са реални.

Основните величини, свързани с работата на една оптична система и тяхната взаимна връзка са дадени в Таблица 7.1.

Таблица 7.1

$f(x', y', x, y)$ Функция на изходната зеница	\rightarrow	$\tilde{w}(v, \mu) = f(x', y', \lambda Rv, \lambda R\mu)$ Кохерентна предавателна функция	$\begin{matrix} \xrightarrow{FT^{-i}} \\ \xleftarrow{FT^{+i}} \end{matrix}$	$w(x, y)$ Амплитудна функция на разсейване на точка
		\downarrow		\downarrow
$MTF = \tilde{W}(v, \mu) $ Модуляционно предавателна функция $PTF = \arg \tilde{W}(v, \mu)$ Фазово предавателна функция	\leftarrow	$OTF = \tilde{W}(v, \mu)$ Оптическа предавателна функция	$\begin{matrix} \xrightarrow{FT^{-i}} \\ \xleftarrow{FT^{+i}} \end{matrix}$	$W(x, y)$ Функция на разсейване на точка

7.7. Оптически смисъл на MTF и на PTF

Отговор на този въпрос ще потърсим с помощта на следните примери.

1. Пример: Нека анализираме изобразяването на хармоничната решетка с една оптична система. Разпределението на интензитета на полето непосредствено зад решетката е

$$I_0(x, y) = a + b \cos 2\pi v_0 x, \quad a \geq b \geq 0, \quad /7.53/$$

Контрастът (съгласно дефиницията на Майкелсон) на така модулираното предметно поле е $K_0 = b/a$. Фурие образът на това поле е

$$FT\{I_0(x, y)\} = a\delta(v)\delta(\mu) + \left(\frac{b}{2}\right) [\delta(v-v_0) + \delta(v+v_0)]\delta(\mu) \quad /7.54/$$

Фурие образът на разпределението на интензитета $\tilde{I}_p(v, \mu)$ в околността на действителния образ можем да пресметнем от израза

$$\tilde{W}(v, \mu) = \frac{\tilde{I}_p(v, \mu)}{\tilde{I}_0(v, \mu)} \quad /7.55/$$

Тогава за интензитета в образа ще получим

$$\begin{aligned} I_p(x, y) &= FT^{-1}[\tilde{I}_0(v, \mu) \cdot \tilde{W}(v, \mu)] = \\ &= a.W(0, 0) + \left(\frac{b}{2}\right) [\tilde{W}(v_0, 0) \cdot \exp(-i2\pi v_0 x) + \tilde{W}(-v_0, 0) \cdot \exp(i2\pi v_0 x)] \end{aligned} \quad /7.56/$$

Нека си припомним свойствата на Фурие образа на реална функция. Ако

$$\tilde{W}(v, \mu) = FT[W(x, y)] = |\tilde{W}(v, \mu)| \cdot \exp[i\phi(v, \mu)], \quad /7.57/$$

то

$$\tilde{W}(v, \mu) = \tilde{W}^*(-v, -\mu), \quad /7.58/$$

а също така

$$0 \leq |\tilde{W}(v, \mu)| = |\tilde{W}(-v, -\mu)| \leq 1 \quad \text{и} \quad /7.59/$$

$$\phi(v, \mu) = -\phi(-v, -\mu). \quad /7.60/$$

Следователно, функцията на пренос на контраста е четна спрямо пространствените честоти ν и μ , а функцията на пренос на фазата е нечетна.

Тъй като $W(0,0) \equiv 1$, то можем да пишем

$$I_p(x, y) = a + \left(\frac{b}{2}\right) \cdot |\tilde{W}(\nu_0, 0)| \cdot \left\{ \exp[i[\phi(\nu_0, 0) - 2\pi\nu_0 x]] + \exp[-i[\phi(\nu_0, 0) - 2\pi\nu_0 x]] \right\} \quad /7.61/$$

или разпределението на интензитета в образът е

$$I_p(x, y) = a + b \cdot |\tilde{W}(\nu_0, 0)| \cdot \cos[2\pi\nu_0 x - \phi(\nu_0, 0)] \quad /7.62/$$

Контрастът на модуляцията в образа е:

$$K_p = \left(\frac{b}{a}\right) \cdot |\tilde{W}(\nu_0, 0)| = K_0 \cdot |\tilde{W}(\nu_0, 0)| \quad /7.63/$$

или

$$\boxed{|\tilde{W}(\nu_0, 0)| = \frac{K_p}{K_0}} \quad , \quad /7.64/$$

от където смисъла на MTF е ясен.

Също така, от израза за разпределението на интензитета в образа е видно, че последният е отместен спрямо идеалния в посока на x , като стойността на трансляцията е

$$x = \frac{\phi(\nu_0, 0)}{2\pi\nu_0} \quad . \quad /7.65/$$

2. Пример: За системата с правоъгълна апертура **COTF** е

$$\tilde{w}(\nu, \mu) = \Pi(\nu\lambda R / A) \Pi(\nu\lambda R / B).$$

Тогава **OTF** ще бъде

$$\begin{aligned} \tilde{W}(\nu, \mu) &= \frac{1}{(A/\lambda R) \cdot (B/\lambda R)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{O}\left(\frac{\nu'}{A/\lambda R}\right) \tilde{O}\left(\frac{\mu'}{B/\lambda R}\right) \tilde{O}\left(\frac{\nu'-\nu}{A/\lambda R}\right) \tilde{O}\left(\frac{\mu'-\mu}{B/\lambda R}\right) d\nu' d\mu' = \\ &= \Lambda\left(\frac{\nu}{A/\lambda R}\right) \cdot \Lambda\left(\frac{\mu}{B/\lambda R}\right) \end{aligned}$$

Дадената система ще пропусне по направление на оста x максимална пространствена честота $(A/\lambda R)$, а по направление y честота $(B/\lambda R)$. Следователно, (AC) действа като филтър на пространствени честоти.

7.8. Вълнова аберация. Примарни геометрични аберации

Най-общо, комплексната функция на зеницата (ФЗ) може да се представи като:

$$f(x_0, y_0, \xi, \eta) = |f(x_0, y_0, \xi, \eta)| \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta(x_0, y_0, \xi, \eta) \right] =$$

$$= |f| \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Delta(x_0, y_0, \xi, \eta)}{n_k'} \right] \quad /7.66/$$

където λ_0 е спектроскопичната дължина на вълната, а λ е в средата с показател n_k' .

Величината $\frac{\Delta}{n_k'}$ представлява отклонението на аберирания вълновия фронт спрямо

Гаусовата опорна сфера w' . Тази величина се нарича **вълнова аберация** на оптичната система.

По дефиниция **геометричен лъч** е една от множеството траектории на вектора на Пойнтинг. Или образно казано, пътят, по който се разпространява елемент от енергията на вълната, една елементарна енергетична тръбица. Като такива, лъчите към една вълна, разпространяваща се в хомогенна изотропна среда са в действителност траекториите на нормалите към фазовия вълнов фронт. Така, лъч минаващ през точка (ξ, η) в равнината на изходната зеница $(AC)'$ пресича в образната равнината (x, y) по-скоро в една точка $P(x, y)$, но не и в параксиалната образна точка $P_0(x_0, y_0)$. Ако например точката (ξ, η) лежи на оста ξ , то елемента от вълновия фронт W_A в околността на тази точка съдържа със съответния елемента от опорната сфера w' ъгъл

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\Delta}{n_k'} \right) = \frac{1}{n_k'} \frac{\partial \Delta}{\partial \xi} \quad [\text{rad}]. \quad /7.67/$$

Аналогично, и за компонентата по оста η . Тогава **напречните геометрични лъчеви аберации** $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$ можем да запишем (приблизително) като

$$x' = x - x_0 = \frac{R}{n_k'} \frac{\partial \Delta}{\partial \xi}$$

$$y' = y - y_0 = \frac{R}{n_k'} \frac{\partial \Delta}{\partial \eta} \quad /7.68/$$

Тези уравнения **задават връзката между вълновите и геометричните aberации.**

Известно е , че вълновата aberация на центрирана система от ротационни повърхнини зависи единствено от следните величини:

- разстоянието на т. P_0 до оста на симетрия;
- разстоянието от оста до елемента (ξ, η) ;
- ъгълът между равнините минаващи през оптичната ос и съответно през точките P_0 и (ξ, η) .

Следователно, функцията на вълновата aberация на системата $\Delta(x_0, y_0, \xi, \eta)$ зависи единствено от следните променливи:

$$(x_0^2 + y_0^2); (\xi^2 + \eta^2); (\xi x_0 + \eta y_0) \quad /7.69/$$

които пряко описват горните величини и, следователно, имат ясен оптичен смисъл. Те се наричат променливи на Зайдел.

Функцията $\Delta(x_0, y_0, \xi, \eta)$ може да бъде разложена в степенен ред по тези променливи. Но преди това, с цел опростяване на записа, нека си въведем следните означения

$$r_0^2 = \left(\frac{n'_k m}{R} \right) (x_0^2 + y_0^2) \quad r^2 = \frac{1}{m^2} (\xi^2 + \eta^2) \quad \chi^2 = -\frac{n'_k}{R} (\xi x_0 + \eta y_0), \quad /7.70/$$

където m е напречното увеличение между зениците. Развитието на $\Delta(x_0, y_0, \xi, \eta)$ по тези променливите на Зайдел до 4-та степен има вида

$$\Delta^{(4)} = -\frac{1}{8} S r^4 + \frac{1}{2} C r^2 \chi^2 - \frac{1}{4} F r_0^2 r^2 - \frac{1}{2} A \chi^4 + \frac{1}{2} D r_0^2 \chi^2 \quad /7.70a/$$

Този израз обединява петте **примарни или Зайделови aberации**. (L. Seidel 1856). Пропуснатите членове с r_0^2 и r_0^4 не представляват aberации, а членовете с r^2 и χ^2 представляват две лъчеви aberации от първи ред, които възникват в резултат на разфокусировка.

Петте константи S, C, F, A, D представляват петте монохроматични вълнови aberации от 4-ти ред, съответно петте лъчеви aberации от 3-ти ред. Тези константи се наричат **коэффициенти на aberации от 3-ти ред или Зайделови коэффициенти**.

Забележка: От казаното става ясно, че

никая от петте основни aberации не присъства самостоятелно !

Не бива да забравяме, че изброените по-долу основни aberации са само членове от развитието на вълновата aberация в степенен ред.

Те съществуват в ансамбъл, а също, както ще стане ясно по-долу, взаимно си влияят. Което е разбираемо от математическа гледна точка.

Физичният смисъл на тези коефициенти, или по-точно влиянието им върху стойностите на лъчевите aberации, ще си обясним, ако положим $y_0 = 0$ ($P_0 \in x$) и заместваме от $\Delta^{(4)}$ в x' и y' .

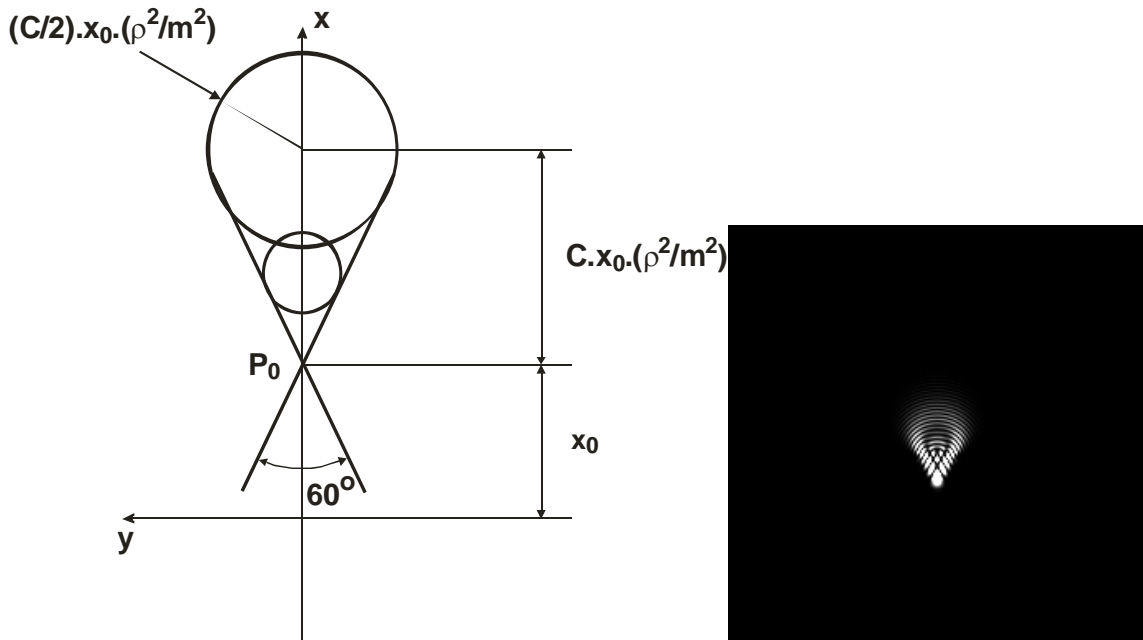
1. **Сферична aberация:** За “чиста” сферична aberация говорим, когато единствено коефициента $S \neq 0$.

След въвеждането на полярни координати (ρ, θ) в равнината на ИЗ $(AC)'$, можем да пишем за x' и y'

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{S}{2} \frac{R}{n_k m^4} \rho^3 \right)^2 \quad /7.71/$$

Следователно, всички лъчи, пресичащи $(AC)'$ в окръжност с радиус ρ , пресичат образната равнина (x, y) в окръжност с радиус $S \frac{R \rho^3}{2 n_k m^4}$, величина, която зависи от третата степен на ρ .

2. **Кома:** нека само $C \neq 0$. В този случай за лъчевата aberация ще получим зависимостта



Фиг. 7.7

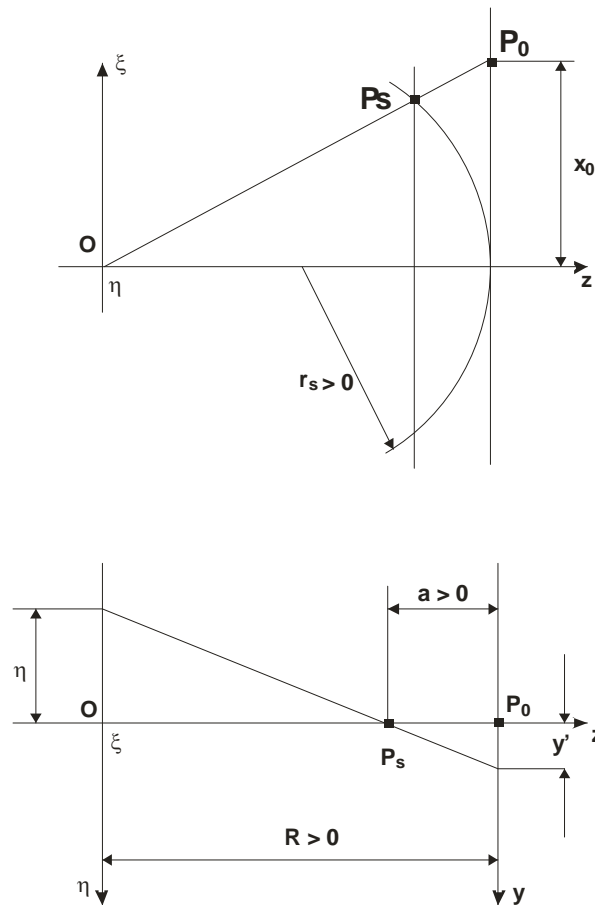
$$\left(x' + C x_0 \frac{\rho^2}{m^2} \right)^2 + y'^2 = \left(\frac{C}{2} x_0 \frac{\rho^2}{m^2} \right)^2 \quad /7.72/$$

която отново представлява уравнение на окръжност (Фиг. 7.7). Нейният радиус е равен на $\left(\frac{C \cdot x_0 \cdot \rho^2}{2m^2}\right)$, а центърът е отместен от P_0 по оста x' на разстояние, по стойност равно на диаметъра на тази окръжност. Всички окръжности образуват фамилия с параметър ρ . Тяхната обвивка е двойка прави, които се пресичат в параксиалната образна точка P_0 и сключват с оста x ъгли $\pm 30^\circ$.

3. **Сагитална деформация (изкривяване) на полето:** Нека само $F \neq 0$.

Ако диференцираме вълновата аберация, от /7.68/ ще получим следната зависимост за лъчевата аберация

$$\frac{y'}{\eta} = -\frac{F}{2} \cdot x_0^2 \cdot \frac{n_k'}{R} \quad /7.73/$$



Фиг. 7.8

Тъй като отношението $\frac{y'}{\eta} = const.$, всички сагитални лъчи се пресичат в една точка

P_s , която лежи извън параксиалната образна равнина (Фиг. 7.8). Нека означим това разстояние като a . Тогава с добра точност можем да пишем $R \gg a > 0$, а от там и

$$\frac{y'}{\eta} \doteq -\frac{a}{R} \doteq -\frac{F}{2} x_0^2 \frac{n_k'}{R} \quad /7.74/$$

А от тук следва, че

$$a = \frac{F}{2} n_k' x_0^2 \quad /7.75/$$

т.е., всички сагитални образи лежат приблизително върху сфера с радиус r_s , където

$$\boxed{\frac{1}{r_s} = n_k' F} \quad /7.76/$$

Тази величина се нарича **сагитална кривина на полето**.

4. **Меридионална (или тангенциална) деформация на полето:**

Нека само $2A + F \neq 0$. Тогава

$$\frac{x'}{\xi} = -\frac{n_k'}{R} x_0^2 \frac{1}{2} (2A + F), \text{ следователно} \quad /7.77/$$

$$\frac{x'}{\xi} = const$$

и, аналогично на предишния случай, всички тангенциални лъчи се пресичат в точка P_t , която лежи приблизително върху сфера с радиус r_t

$$\boxed{\frac{1}{r_t} = n_k' (2A + F)} \quad /7.78/$$

Тази величина се нарича **тангенциална кривина на полето**.

$$\boxed{\text{Както се вижда, в общия случай } r_s \neq r_t .}$$

5. Астигматизъм:

Нека само $A \neq 0$. Половината от разликата между тангенциалната и сагиталната кривина, наричаме астигматизъм.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_t} - \frac{1}{r_s} \right) = n'_k A \quad /7.79/$$

6. Средна деформация на полето:

Ако единствено $A + F \neq 0$, то можем да дефинираме една средна кривина на полето като

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_t} + \frac{1}{r_s} \right) = n'_k (A + F) \quad /7.80/$$

Тази величина се нарича просто **кривина на полето** и е основна характеристика за планарните свойства на изобразяването с дадената система.

7. Дисторсия:

Нека само $D \neq 0$. Тогава

$$x' = -\frac{D}{2} \left(\frac{n'_k m}{R} \right)^2 x_0^3; \quad y' = 0 \quad /7.81/$$

Присъствието на дисторсия, става причина за отместване на образа на точка спрямо нейния параксиален образ P_0 със x' . Това отместване е пропорционално на x_0^3 . Следователно, права линия, лежача в предметната равнина ще бъде изобразена в крива. Знакът на коефициента на дисторсия от трети ред е от особена важност.

- при $D > 0$ казваме, че имаме дисторсия от тип “буренце” ,
- при $D < 0$ дисторсията е от тип “възглавничка” .

7.9. Алгоритъм за изчисляване на коефициентите на аберация от 3-ти ред

Нека са дадени са следните входни параметри за една оптичната система:

$s_1 \rightarrow$ положение на предметната равнина спрямо първата върхова точка.

$t_1 \rightarrow$ положение на Входната Зеница спрямо първата върхова точка.

$n_i \rightarrow$ показател на пречупване на средата пред i -та повърхност.

$n'_i \rightarrow$ показател на пречупване на средата зад i -та повърхност.

$r_i \rightarrow$ радиус на i -тата повърхност

$d_i \rightarrow$ разстоянието между върховите точки на i -та и $(i+1)$ -та повърхности.

$h_1 = \frac{s_1}{t_1 - s_1}$ - височина на падане върху първата оптична повърхност.

$$S_1 = \frac{t_1(t_1 - s_1)}{n_1 s_1}$$

$s_i = s'_{i-1} - d_{i-1}$ - предметно разстояние за (i) -та повърхност.

$Q_i = n_i \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{s_i} \right)$ - инвариант на Аббе за (i) -та повърхност.

$\frac{1}{s'_i} = \frac{1}{r_i} - \frac{Q_i}{n_i}$ - образното разстояние за (i) -та повърхност.

$h_i = h_{i-1} \frac{s_i}{s'_{j-1}}$ - височина на падане върху (i) -та повърхност.

$$\Delta \left(\frac{1}{ns} \right)_i = \frac{1}{n'_i s'_i} - \frac{1}{n_i s_i}$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{h_i^2 Q_i}$$

$$\delta_i = \delta_1 + \sum_{j=2}^i \frac{d_{j-1}}{n_j h_{j-1} h_j}$$

$$\tau_i = \varepsilon_i + \delta_i$$

$$\Delta \left(\frac{1}{n} \right)_i = \frac{1}{n'_i} - \frac{1}{n_i}$$

$$S_i = h_i^4 Q_i^2 \Delta \left(\frac{1}{ns} \right)_i$$

$$C_i = \tau_i S_i$$

$$A_i = \tau_i C_i$$

$$P_i = -\frac{1}{r_i} \Delta \left(\frac{1}{n} \right)_i$$

$$F_i = A_i + P_i$$

$$D_i = \tau_i F_i$$

Аберациите от трети ред на цялата оптична система са резултат от натрупванията от всяка повърхност и се изразяват със сумите:

$$S = \sum S_i \quad \text{сферична аберация.}$$

$$C = \sum C_i \quad \text{кома}$$

$$A = \sum A_i \quad \text{астигматизъм}$$

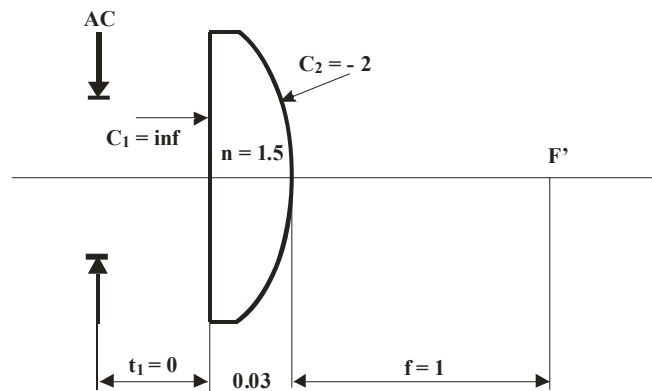
$$F = \sum F_i \quad \text{сагитална кривина}$$

$$D = \sum D_i \quad \text{дисторсия}$$

$$P = \sum P_i \quad \text{сума на Пецвал}$$

Този алгоритъм се поддава лесно на програмиране и позволява да бъде извършена бърза оценка за монохроматичното корекционно състояние на дадена оптична система. Ако бъдат повторени тези изчисления за различни дължини на вълните, може да бъде оценена и хроматичната корекция от трети ред.

Задача: Плоско изпъкнала леща е изработена от стъкло с показател на пречупване $n = 1.5$. Останалите параметри са показани на Фиг.7.9. Определете нейните аберационни коефициенти от трети ред.



Фиг. 7.9

Решение:

Фокусното разстояние определяме от познатия израз

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left(-\frac{1}{r_2} \right)$$

при $n = 1.5$ и $r_2 = -0.5$

Тогава

$$S = 9 \quad A = 0,884$$

$$C = -2,82 \quad F = 1,555$$

$$D = +0,07$$

и кривината на Пецвал е:

$$\frac{1}{r} = n_2'(A + F) = 1 \cdot (0,884 + 1,555) = + 2,439$$

Сега нека потърсим ново положение \bar{t}_1 на апертурната бленда АС, такова, че комата от трети ред да бъде коригирана.

При новото положение на АС, коефициента на комата за i -та повърхност е:

$$\bar{C}_i = \left(\frac{t_1 - s_1}{\bar{t} - s_1} \right)^2 \left[C_i + \frac{\bar{t}_1 \cdot s_1}{n_1 (\bar{t}_1 - s_1)} S_1 \right],$$

а за системата като цяло (и искаме той да бъде нула)

$$C = \sum_{i=1}^{i=k} \bar{C}_i = 0,$$

от където следва условието за корекция на комата от трети ред

$$\frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{n_1} \frac{S}{C}$$

При $s_1 \rightarrow -\infty$, т.е. когато върху лещата пада успореден сноп лъчи,

$$\bar{t}_1 = n_1 \frac{C}{S} = 1 \cdot \frac{-2,82}{9} = -0,313.$$

Следователно, при дадените условия на работа, една апертурна бленда, разположена пред плоско изпъкнала лещата на разстояние приблизително равно на $\frac{1}{3} f'$, ще коригира в значителна степен комата от трети ред. При друга форма на лещата и други условия на оптическо спрягане, това твърдение в общия случай не е вярно.

8. ЕЛЕМЕНТАРНИ ОСНОВИ НА ХОЛОГРАФИЯТА

В стремежа си да повиши разделителната способност на електронния микроскоп, английският физик Денис Габор (1947 г.) намери нов метод за запис и реконструкция на пространствен предмет. Тъй като методът записва пълната информация за преминалата или отразена от предмета вълна, т. е. както за амплитудата, така и за фазата, Габор го е нарекъл холография (*holos* = цял, пълен; *grafos* = запис), а средата, в която записът се съдържа – холограма. Освен това откривателят на метода е доказал теоретически и експериментално, че с подходящо осветление на холограмата можем без допълнителни операции да получим възстановена вълната, с която е била записана холограмата.

Методът на Габор е бил усъвършенстван от Лейт и Упатнийкс. Но бурното развитие на холографията настъпва след 1962 г., когато се появяват надеждни лазерни източници.

8.1. Запис и свойства на тънка холограма

Холограмите се записват предимно върху фотоплаки (макар днес да са на разположение и други среди за запис). Ако една фотоплака бъде осветена със светлина с интензитет I за време τ , т. е. Тя бъде изложена на експозиция $E = I \cdot \tau$, след стандартната химическа обработка нейният амплитуден коефициент на пропускане t ще бъде $t = kE^{-\gamma/2}$, където γ се нарича стръмност (или градация) на чувствителният слой.

Нека предположим, че в равнината на чувствителния слой интерферират две взаимно кохерентни вълни. Комплексната амплитуда на едната от тях нека означим с u_r и ще я наричаме опорна (референтна, относителна). Резултантното оптично поле дадено от принципа за суперпозиция ще бъде $(u + u_r)$, така че интензитета I , падащ върху чувствителният слой ще бъде пропорционален на израза

$$I \sim (u + u_r)(u + u_r)^* = |u_r|^2 + |u|^2 + u_r^* u + u_r u^*$$

След обработката на чувствителният слой, неговият комплексен коефициент на амплитудна пропускливост ще бъде:

$$t \sim \left[|u_r|^2 \left(1 + \frac{|u|^2 + u_r^* u + u_r u^*}{|u_r|^2} \right) \right]^{-\gamma/2}$$

Ако е валидно предположението $|u_r|^2 \gg |u|^2$ - опорното поле е много по-мощно от обектното (което на практика е твърде вероятно), то горният израз може да бъде развит в ред на Мак Лорен. Ако вземем само първите два члена от развитието, ще получим

$$t \sim |u_r|^{(-\gamma-2)} \left[|u_r|^2 - \frac{\gamma}{2} |u|^2 - \frac{\gamma}{2} u_r^* u - \frac{\gamma}{2} u_r u^* \right].$$

В случай, че $u_r = const.$ по цялата площ на чувствителния слой, можем лесно да изчислим комплексната амплитуда U на полето непосредствено зад плаката (за която предполагаме, че е много тънка), в случай, че я осветим с възпроизвеждаща вълна с амплитуда u_c непосредствено пред слоя:

$$U = t u_c \sim u_c |u_r|^2 - \frac{\gamma}{2} u_c |u|^2 - \frac{\gamma}{2} u_c u_r^* u - \frac{\gamma}{2} u_c u_r u^*$$

Особен е случаят, когато $u_r = u_c$:

$$U \sim u_r |u_r|^2 - \frac{\gamma}{2} u_r |u|^2 - \frac{\gamma}{2} |u_r|^2 u - \frac{\gamma}{2} u_r^2 u^*$$

Първият член е ослабената опорна вълна ($u_r = const.$). Вторият изразява дифракцията на u_r върху решетката, породена само от u . Третият член е пропорционален на комплексната амплитуда на предметната вълна и създава недействителен образ. Четвъртият член е пропорционален на комплексно-спрегнатата предметна вълна и на квадрата на u_r . При обща опорна вълна u_r нейното обяснение не е просто. За това, нека минем към важния за практиката случай, когато вълните u и u_r са сферични и разходящи. В даденият случай ще се ограничим върху точкови източници.

Нека в равнината на чувствителния слой да бъде разположена правоъгълната координатна система (O, x, y, z) с начало O и ос z , перпендикулярна на равнината на слоя. Нека Q е монохроматичен предмет, с дължина на вълната λ .

Този точков източник създава в точка $P(\xi, \eta)$ от холограмата оптично поле с комплексна амплитуда:

$$u = a \frac{e^{ik(r+L)}}{r}$$

където a е константа, $r = \overline{QP}$, а L е константен фазов член ($k = 2\pi/\lambda$). Опорният

източник $Q_r(x_r, y_r, z_r)$ излъчва също сферична вълна $u_r = a_r \frac{e^{ik(r_r+L_r)}}{r_r}$. Ако

реконструкцията бъде извършена отново с точков монохроматичен източник Q_c , който има дължина на вълната λ' , то третият и четвъртият член ще бъдат:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_c u_r^* u \\ u_c u_r u^* \end{array} \right\} = a' \frac{e^{ik(r'+L')}}{r'}$$

Този израз би отговарял на полето в точка P , възбудено от точков монохроматичен източник $Q'(x', y', z')$ с дължина на вълната λ' , ако за всички точки $P(\xi, \eta)$ в равнината на холограмата важи:

$$\begin{cases} u_c u_r^* u \\ u_c u_r u^* \end{cases} = a' \frac{e^{ik'(r'+L')}}{r'}$$

При това L' трябва да бъде константен фазов член, не зависещ от положението на точка P в равнината на H . Ако сравним двата израза ще получим:

$$L' = \left(r_c \mp \frac{\lambda'}{\lambda} r_r \pm \frac{\lambda'}{\lambda} r - r' \right) + \left(L_c \mp \frac{\lambda'}{\lambda} L_r \pm \frac{\lambda'}{\lambda} L \right)$$

Тъй като диференциалът

$$dL' = \frac{\partial L'}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial L'}{\partial \eta} d\eta$$

трябва да бъде равен на нула за всяко ξ и η , то съгласно горния израз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(r_c \mp \frac{\lambda'}{\lambda} r_r \pm \frac{\lambda'}{\lambda} r - r' \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(r_c \mp \frac{\lambda'}{\lambda} r_r \pm \frac{\lambda'}{\lambda} r - r' \right) &= 0 \end{aligned} \quad \text{за всяко } \xi \text{ и } \eta.$$

Тази система уравнения има някои тривиални решения. Едно от тях е когато $\lambda' = \lambda$ и $r_c = r_r$. Тогава (само от горните знаци):

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (r - r') = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (r - r') = 0$$

Тези уравнения могат да бъдат изпълнени за всяко ξ и η , само ако $r = r'$, т. е. ако $Q \equiv Q'$. Следователно, ако реконструкцията бъде извършена с опорният източник, **примарния образ съвпада с предмета и е без аберации.**

Това важи с точността на развитието за $u = kE^{-\gamma/2}$. Ако обработката даде $\gamma = -2$, необходимостта от развитие в ред отпада.

Извън тези специални случаи, условията за $\frac{\partial}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial}{\partial \eta}$, могат да бъдат изпълнени само отчасти. Ако развием r_c, r_r, r и r' в ред на Мак Лорен, то в пространството от първи ред ще имаме, например:

$$r = -z - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2z} + \frac{\xi x + \eta y}{z} - \frac{x^2 + y^2}{2z}$$

$$\vdots$$

Ако заместим в условието с $\frac{\partial}{\partial \xi}$, то след диференцирането ще получим:

$$-\xi \left(\frac{1}{z_c} \mp \frac{\lambda' 1}{\lambda z_r} \pm \frac{\lambda' 1}{\lambda z} - \frac{1}{z'} \right) + \left(\frac{x_c}{z_c} - \frac{\lambda' x_r}{\lambda z_r} \pm \frac{\lambda' x}{\lambda z} - \frac{x'}{z'} \right) = 0$$

Тъй като това равенство следва да бъде изпълнено за всяко ξ , то е необходимо:

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{z_c} \mp \frac{\lambda' 1}{\lambda z_r} \pm \frac{\lambda' 1}{\lambda z}$$

$$\frac{x'}{z'} = \frac{x_c}{z_c} \mp \frac{\lambda' x_r}{\lambda z_r} \pm \frac{\lambda' x}{\lambda z}$$

Това са уравненията за изобразяване с тънка холограма. Те до известна степен напомнят на Гауссовото уравнение за изобразяване с тънка леща в параксиалното пространство. Чрез тях можем да изчислим координатите (x', y', z') на образа като стойността на y' ще получим от условието $\frac{\partial}{\partial \eta}$.

Виждаме, че при реконструкцията получаваме два образа, наричани най-често примарен и секундарен, който е спрегнат с примарния. На секундарният образ отговаря долния знак в равенствата.

От уравненията за изобразяване можем да изчислим напречното увеличение:

$$M = \frac{dx'}{dx} = \pm \frac{\lambda' z'}{\lambda z}$$

и осевото (надлъжното) увеличение M_o :

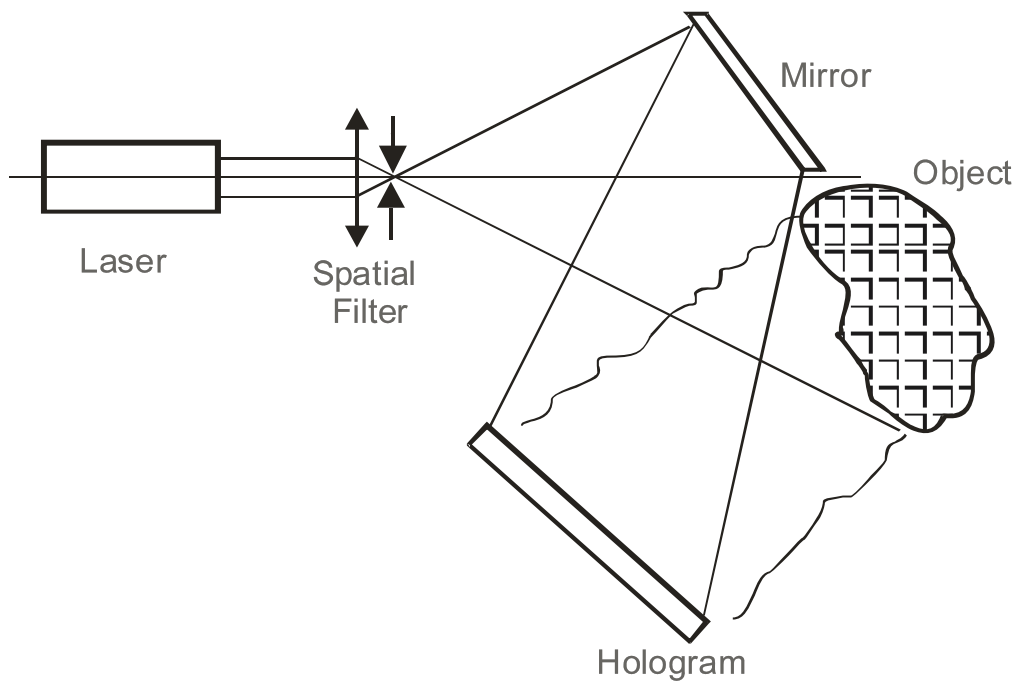
$$M_o = \frac{dz'}{dz} = \pm \frac{\lambda}{\lambda'} M^2$$

Ако вземем и следващите членове в развитието за разстоянията r_c, r_r, r и r' , ще установим, че в общия случай величината L' не е константна спрямо ξ и η , а е функция на четири променливи $L'(x, y, \xi, \eta)$ и има смисъла на въннова аберация на холограмата. Следователно, нейните свойства са аналогични на тези на вълновата аберация $\Delta(x_0, y_0, \xi, \eta)$ за центрирана оптична система, състояща се от ротационни оптични повърхнини. Следователно, погледнато от чисто математическа гледна

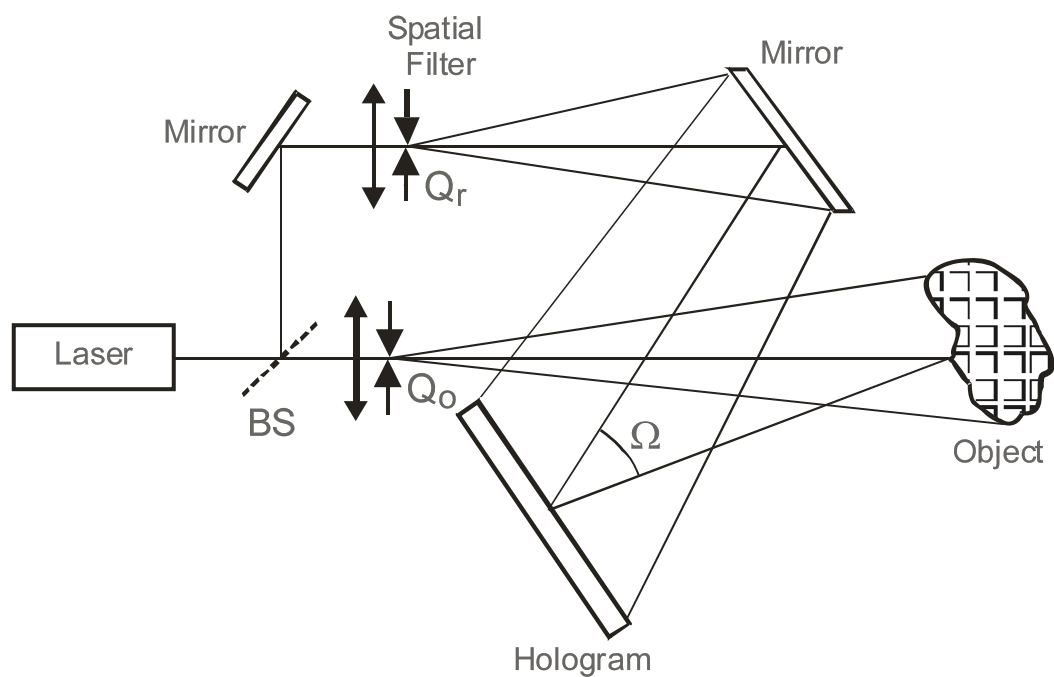
точка, холографското изобразяване притежава същите aberации, както и това с лещи и огледала (с изключение на споменатия специален случай).

Съществуват много схеми за холографски запис. И тук отново можем да използваме разделението :

а) запис с делене на вълновия фронт:



б) запис с делене на амплитудата



Втората схема изисква по-голяма стабилност на съоръжението и в някои случаи климатизация.

Например, при $\Omega = 45^\circ$ и $\lambda = 633 \text{ nm}$, честотата на интерференчните ивици е $0,83 \text{ }\mu\text{m}$. Стабилността на положението на H трябва да бъде поне 10 пъти по-добра, т. е. $0,083 \text{ }\mu\text{m}$. Освен това при записа е необходима емулсия с разделителна способност по-висока от $1200 [1/\text{mm}]$. Също въздушните потоци влияят върху оптичните пътища. Тъй като една промяна в оптичния път с λ води до преместване на интерференционната ивица с един период, то стабилността в разликата на оптичните пътища трябва да бъде по-висока от $1/10$ от λ , т. е. $0,06 \text{ }\mu\text{m}$. От тук произтичат строгите изисквания за твърдост, стабилност и климатизация на апаратурата за запис на холограми.

8.2. Фурие холография

Реконструкцията на холографския образ се разглежда като дифракция на възстановяващата вълна върху холограмата. В предишния раздел разгледахме Френеловата дифракция, тъй като в развитието на разстоянията в редове се ограничихме до членове от втора степен. За това, подобна холограма се нарича Френелова. Ако при дифракционният процес е достатъчно да бъдат разглеждани само линейните членове от развитието, говорим за Фраунхоферова холограма.

От предишните лекции знаем, че във фокалната равнина на телескоп се наблюдава разпределение на амплитудата, пропорционално на комплексния Фурие спектър на функцията на амплитудна пропускливост на обект, разположен пред обектива. Този факт може да бъде използван за запис на Фурие-холограма.

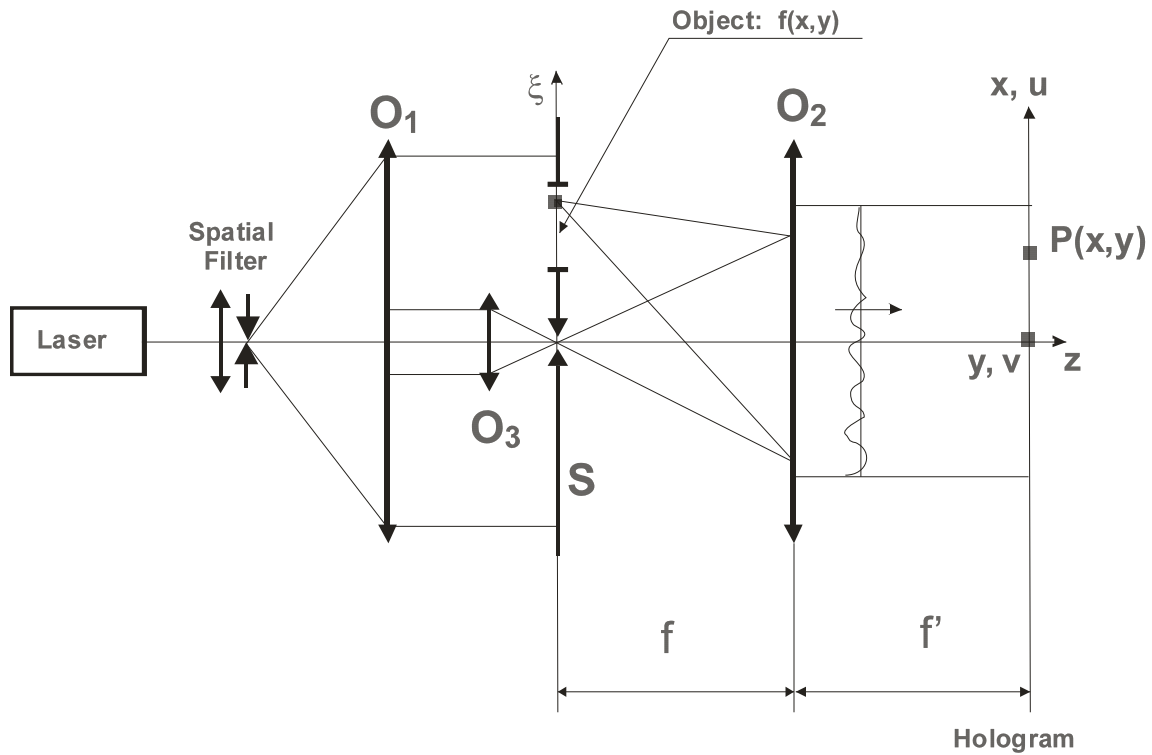
Нека в предметната фокална равнина на Ф.Т. обектив O_2 е разположен транспарант S с размери $(A \times B)$ и с амплитудна пропускливост $f(\xi, \eta)$. Координатните оси (ξ, η) в равнината на транспаранта избираме така, че $\xi \parallel x$, $\eta \parallel y$. Също така, обектив O_3 формира точков опорен източник O с дължина на вълната λ в равнината (ξ, η) . Амплитудната пропускливост на целият екран S е:

$$g(\xi, \eta) = a\delta(\xi, \eta) + f(\xi, \eta),$$

където a характеризира яркостта на опорния източник.

В съответствие с предишните лекции, комплексната амплитуда в една точка $P(x, y)$ от образната фокална равнина (която е Ф. Т. равнината) на обектива O_2 е пропорционална на комплексния $(-i)$ Фурие спектър $G(u, v)$ на функцията на амплитудната пропускливост $g(\xi, \eta)$ на екрана S . Следователно, разпределението на интензитетът е пропорционално на мощностния спектър $|G(u, v)|^2$ на функцията $g(\xi, \eta)$. За редуцираните координати отново важи:

$$u = \frac{x}{\lambda f}; \quad v = \frac{y}{\lambda f}$$



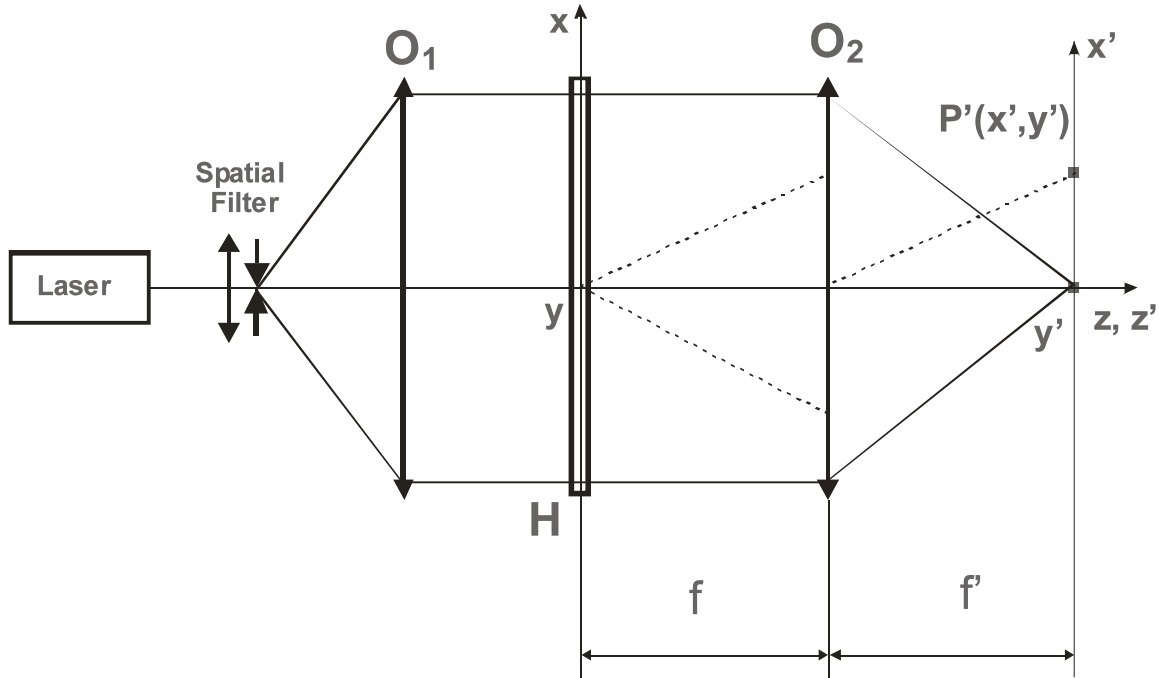
Ако експонираната холограма проявим на стръмност $\gamma = -2$, то нейната амплитудна пропускливост t ще бъде право пропорционална на интензитета на светлината, следователно, на мощностният спектър на $g(\xi, \eta)$.

$$t \sim |G(u, v)|^2 = \left| G\left(\frac{x}{\lambda f'}, \frac{y}{\lambda f'}\right) \right|^2$$

Така получената холограма ще възстановим по следната схема. Тази схема е подобна на предишната, но отсъства обективът O_3 , а екранът S е заменен с холограмата H . Падащото върху холограмата поле дифрактира. Обективът O_2 селектира далечната зона (Фраунhoferовата дифракция) като я концентрира в своята образна фокална равнина. Тогава в точката $P'(x', y')$ от тази равнина, комплексната амплитуда на полето ще бъде пропорционална на $(-i) F$. Т. е. на амплитудната пропускливост $t(x, y)$ на холограмата. Точка $P'(x', y')$ е с редуцирани координати:

$$u' = \frac{x'}{\lambda f'}; \quad v' = \frac{y'}{\lambda f'}$$

$$u_p' \sim F^{-i}[t(x, y)] \sim F^{-i} \left[\left| G\left(\frac{x}{\lambda f'}, \frac{y}{\lambda f'}\right) \right|^2 \right]$$



От теоремата за Ф. Т. на авто-корелацията знаем, че ако

$$g(\xi, \eta) \xrightarrow{F^{-1}} G(u, v), \text{ то}$$

$$|G(u, v)|^2 \xrightarrow{F^{-1}} \gamma(\xi, \eta)$$

където $\gamma(\xi, \eta)$ е авто-корелационната функция на $g(\xi, \eta)$.

Така, че (съгласно теоремата за мащаба):

$$u_{p'} \sim (\lambda f')^2 \gamma(-\lambda f' u', -\lambda f' v') \sim \gamma(-x', -y')$$

Виждаме, че в координатната система (x', y') е удобно да се въведе нова система $x'' = -x', y'' = -y'$.

Тогава $u_{p'} \sim \gamma(x'', y'')$

От дефиницията за авто-корелационната функция (чрез конволюторен интеграл):

$$\gamma(x) = f(x) * f^*(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f^*(u-x) du$$

и за възстановената амплитуда можем да пишем

$$u_{p'} \sim g(x'', y'') * g^*(-x'', -y'') = [a\delta(x'', y'') + f(x'', y'')] * [a\delta(-x'', -y'') + f^*(-x'', -y'')].$$

Или с малка преработка

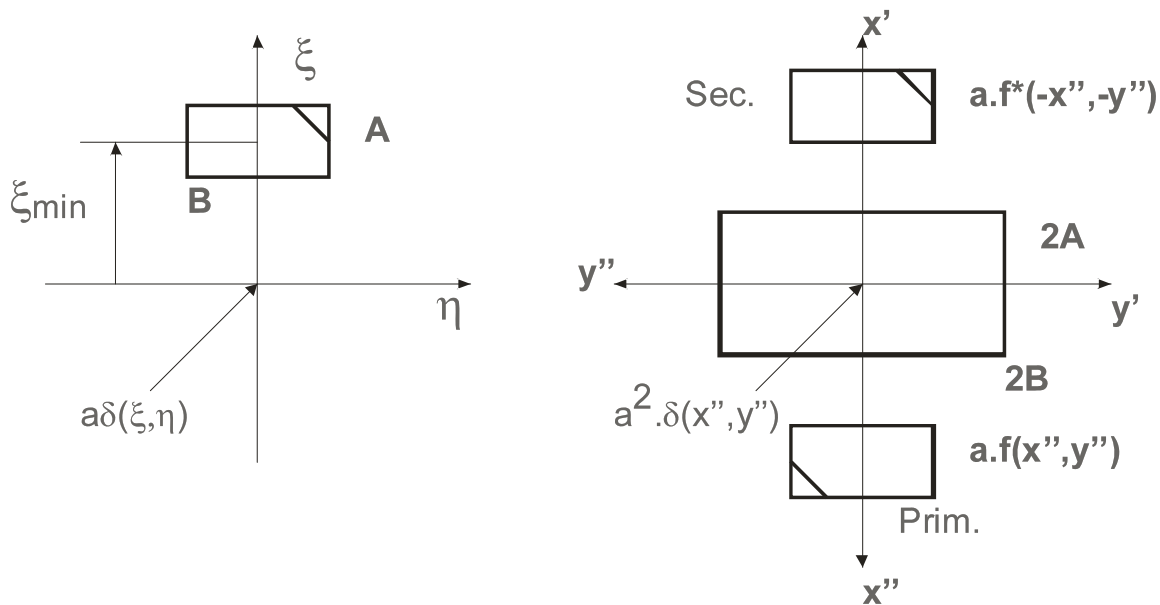
$$u_p \sim a^2 \delta(x'', y'') * \delta(-x'', -y'') + f(x'', y'') * f^*(-x'', -y'') + a\delta(x'', y'') * f^*(-x'', -y'') + a\delta(-x'', -y'') * f(x'', y'')$$

Отделните членове на този израз имат следният смисъл:

1. $a^2 \delta(x'', y'') * \delta(-x'', -y'') = a^2 \delta(x'', y'')$ - този член представлява образът O' на точковия източник O .
2. $f(x'', y'') * f^*(-x'', -y'')$ е авто-корелационната функция на $f(x'', y'')$. Тъй като тази функция е нулева извън правоъгълника $A \times B$, то този член е идентично равен на нула извън правоъгълника с размери $(2A \times 2B)$.
3. $a\delta(x'', y'') * f^*(-x'', -y'') = af^*(-x'', -y'')$ е комплексно спрегнат към $af(x'', y'')$.
4. $a\delta(-x'', -y'') * f(x'', y'') = af(x'', y'')$

Следователно, в образната фокална равнина на обектива O_2 ще получим два образа на функцията $f(\xi, \eta)$, комплексно спрегнати по амплитуда. Тези образи няма да бъдат повлияни от авто-корелацията, ако предметът в равнината на екрана S е разположен на разстояние от оптичната ос равно на:

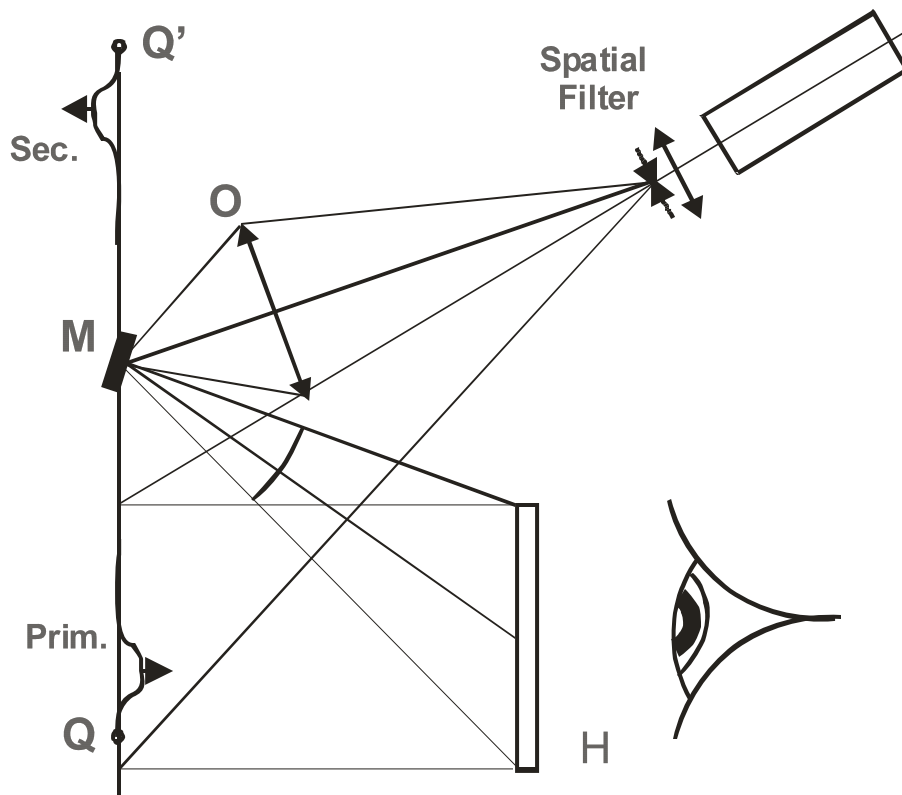
$$\xi_{\min} \geq \frac{3}{2} A$$



Примарният образ е двустранно обърнат, а секундарния е изправен. И двата образа са реални, следователно, могат да бъдат наблюдавани върху екран или матово стъкло. Обективът O_2 може да бъде заменен с човешкото око. Тогава примарният образ ще бъде изправен, а секундарният - обърнат двустранно. Тъй като предметът и точковият опорен източник лежат в една равнина, в S , то всяка

напречна транслацията на S ще води до изменение в относителното разпределение на интензитета в холографския образ.

8.3. Безлещова Фурие холограма (*George Stroke, 1965*)



8.4. Холографска интерферометрия

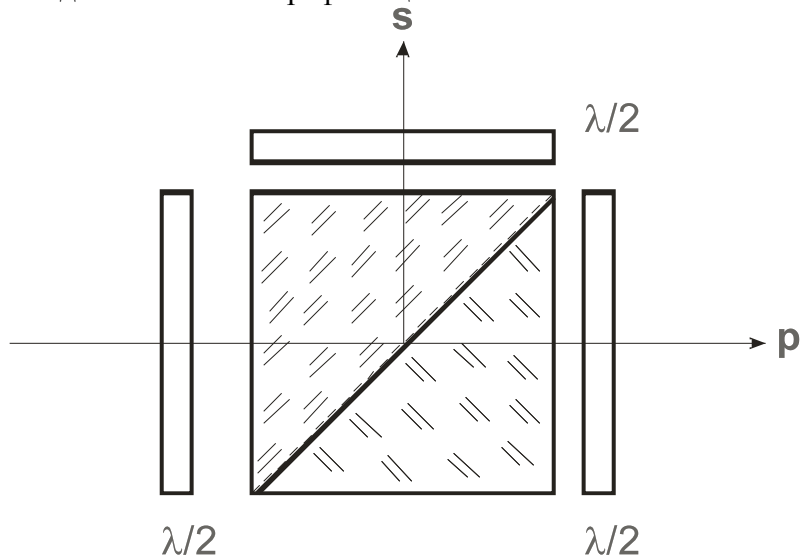
1. Метод на реалното време

Принцип: Предметът в първоначално състояние се холографира. След обработката на холограмата, тя поставя точно на същото място, където е била при записа. След реконструкцията, холограмата генерира вълна, която е напълно идентична с предметната вълна. Ако предмета се натовари, новата предметна вълна интерферира с възстановената от холограмата първоначална предметна вълна, която служи при този процес като базис за сравнение. Методът е сравнителен и позволява да бъде проследено развитието във времето на някакъв процес. При това не бива да се забравя за основното изискване двете предметни вълни да са с еднакъв интензитет. За целта се използва пренастроваем делител на сноповете.

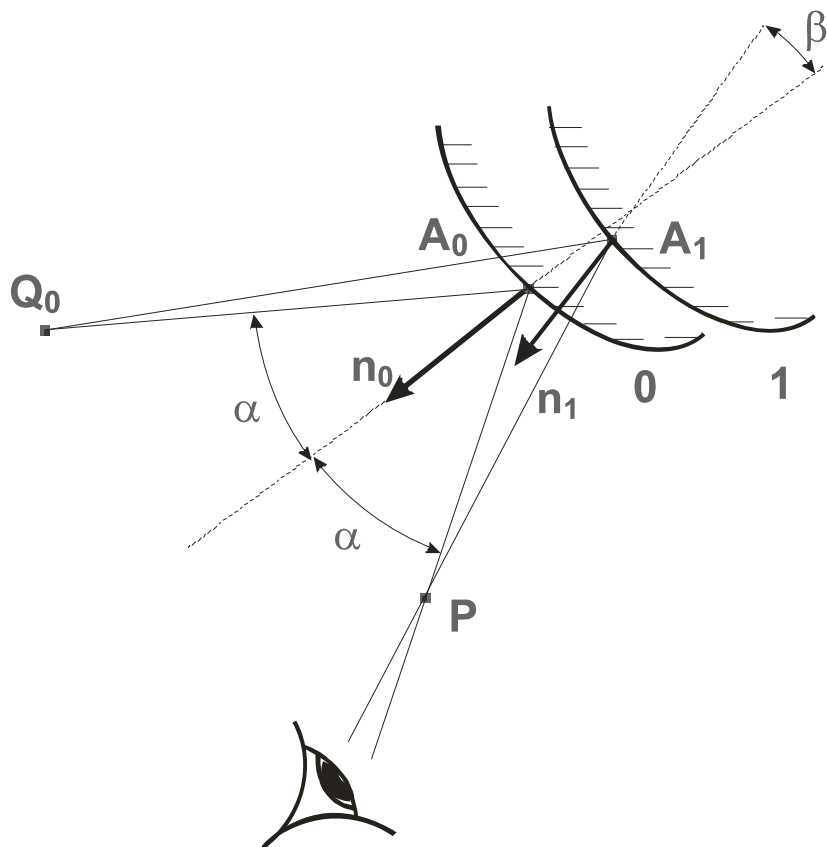
Недостатък на метода (и то съществен) е невъзможността холограмата да бъде върната на своето първоначално място. Винаги остава една малка грешка, която води до нулева интерференчна картина. При фотоплаките, също така

свиването на емулсията в резултат на обработката води до появата на една до две нулеви ивици.

Пренастроаема делител за холографски цели:



В общият случай, **интерпретацията на интерференционните ивици** не е лесна. Обикновено интерпретацията се прави по следната схема:



Разликата в оптичните пътища е

$$\Delta L = d \cos(\alpha - \beta) + d \cos(\alpha + \beta) = 2d \cos \alpha \cos \beta$$

За да бъдат ивиците локализирани върху повърхността на обекта е необходимо ΔL да не се изменя с изменението на положението на окото.

При трансляция ивиците са локализирани в безкрайност. При ротация те се локализират върху повърхнината или близко до нея.

2. Метод на двойната експозиция

Основен принцип: Върху една плака се експонират последователно две холограми. Едната се прави при начално (номинално) състояние на обекта, а втората, след като той бъде деформиран в резултат от външно действие, например, топлинен или химичен процес, освобождаване на вътрешни напрежения, отнемане на част от веществото или механично натоварване. След обработката на холограмата, при осветяване с опорния източник се възстановяват двете вълни, които, в общия случай, интерферират помежду си.

2.1. Защо се възстановяват две вълни?

- ако си представим, че комплексната амплитуда е функция от времето $u(\tau)$, то и интензитета $I(\tau)$, както и експозицията $E = \int_0^{\tau_c} I d\tau$ са също функции от времето.

Третият член в израза

$$U = u_r |u_r|^2 - \frac{\gamma}{2} u_r |u|^2 - \frac{\gamma}{2} |u_r|^2 u - \frac{\gamma}{2} u_r^2 u^*$$

е пропорционален на средната стойност във времето на комплексната амплитуда $u(\tau)$ на предметното поле в дадена точка

$$u' = \langle u(\tau) \rangle = \frac{1}{\tau_c} \int_0^{\tau_c} u(\tau) d\tau$$

Ако u_0 и u_1 са комплексните амплитуди преди деформацията, то

$$u' = \frac{1}{\tau_c} \left(\frac{\tau_c}{2} u_0 + \frac{\tau_c}{2} u_1 \right) = \frac{1}{2} (u_0 + u_1)$$

3. Интерферометричен метод за анализ на вибрации

Ако предметът трепти хармонично, то и фазата на предметната вълна се изменя хармонично в дадена точка от холограмата:

$$u(\tau) = ue^{ia \cos(2\pi f\tau)}$$

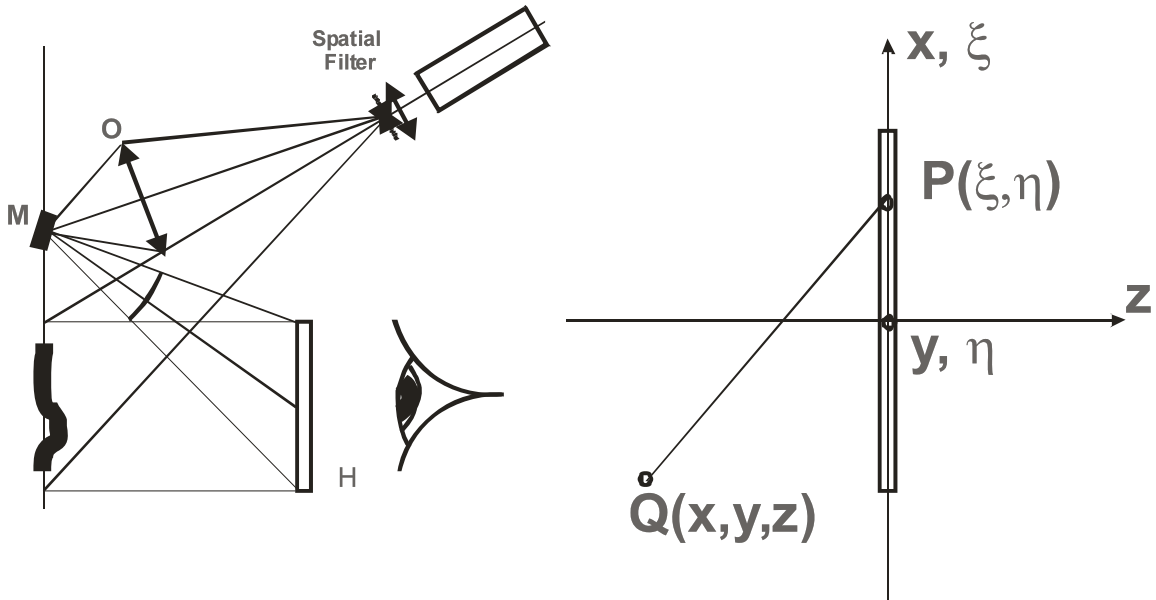
$$u = const.$$

Ако $\tau_c = \frac{1}{f}$

$$u' = f \int_0^{1/f} ue^{ia \cos 2\pi f\tau} d\tau = \frac{uf}{2\pi f} \int_0^{2\pi} e^{ia \cos(2\pi f\tau)} d(2\pi f\tau) = uJ_0(a)$$

$I' = I_0 J_0^2(a)$ е интензитетът на ивиците.

Задача: Определете стойността на сферичната аберация от III-ти ред на безлещова Фурие холограма.



- Q е предметна точка,
- Q_r – опорен източник,
- Q_c – възстановен източник,
- Q' – образ.

Решение: Вълновата аберация L' е дадена от израза:

$$L' = \left(r_c \mp \frac{\lambda'}{\lambda} r_r \pm \frac{\lambda'}{\lambda} r - r' \right) + \left(L_c \mp \frac{\lambda'}{\lambda} L_r \pm \frac{\lambda'}{\lambda} L \right)$$

Нека този израз да развием в ред на Мак Лорен

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2$$

$$r = z \sqrt{1 + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{z^2}}$$

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots$$

$$r = z \left[1 + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z^2} - \frac{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^2}{8z^4} + \dots \right]$$

Знаем, че на сферичната аберация в пространството на вълновите аберации от 4-ти ред отговаря членът, който съдържа радиуса $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ на четвърта степен

$$\left(\Delta^{(4)} = -\frac{1}{8} S r^4 + \dots \right)$$

От членовете от 4-ти ред в развитието за вълновите аберации се вижда, че 3-тият член е равен на

$$\begin{aligned} -\frac{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^2}{8z^3} &= \frac{(x - \xi)^4 + 2(x - \xi)^2(y - \eta)^2 + (y - \eta)^4}{-8z^3} = \\ &= -\frac{\xi^4 + 2\xi^2\eta^2 + \eta^4}{8z^3} + \text{следващите членове} = -\frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{8z^3} + \dots \end{aligned}$$

От тук следва, че на сферичната аберация отговаря членът

$$SphA L^{(4)} = -\frac{1}{8} \left[\frac{1}{z_c^3} \mp \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{1}{z_r^3} \pm \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^3} \right] (\xi^2 + \eta^2)^2$$

или коефициентът S на сферичната аберация от трети ред е равен на

$$S = \frac{1}{z_c^3} \mp \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{1}{z_r^3} \pm \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^3}$$

При безлещовата Фурие холограма е изпълнено условието $z = z_r$. Тогава от първото уравнение за изобразяване с холограма ще получим, че

$$\begin{aligned} \frac{1}{z'} &= \frac{1}{z_c} \mp \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{1}{z_r} \pm \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{1}{z} \\ \frac{1}{z'} &= \frac{1}{z_c} \mp \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{1}{z_r} \pm \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{1}{z_r} = \frac{1}{z_c} \Rightarrow z' = z_c \end{aligned}$$

и

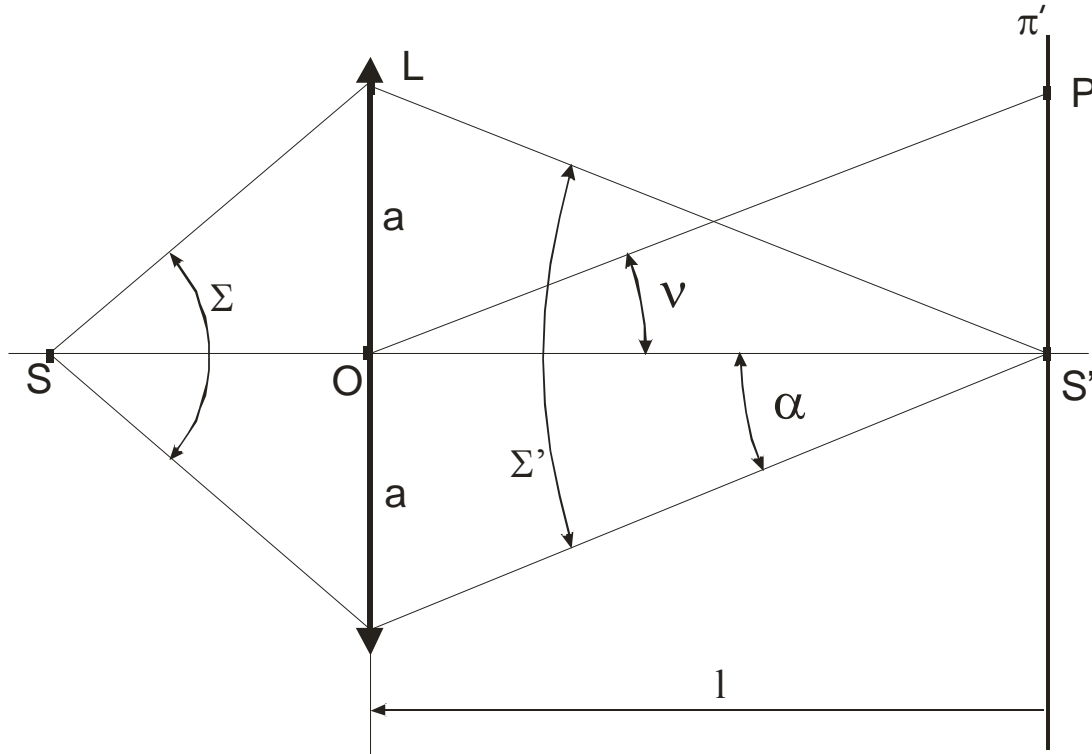
$$S = \frac{1}{z'^3} \mp \frac{\lambda' 1}{\lambda z^3} \pm \frac{\lambda' 1}{\lambda z^3} - \frac{1}{z'^3} \equiv 0.$$

Извод: Безлещовата Фурие холограма *не притежава* сферична аберация!

9. СПЕКЪЛ МЕТОД

9.1. Спекъл структура на образа на дифузен предмет

Нека си представим, че идеалният обектив O изобразява монохроматичен точков източник S в точката S' (фиг. 9.1).



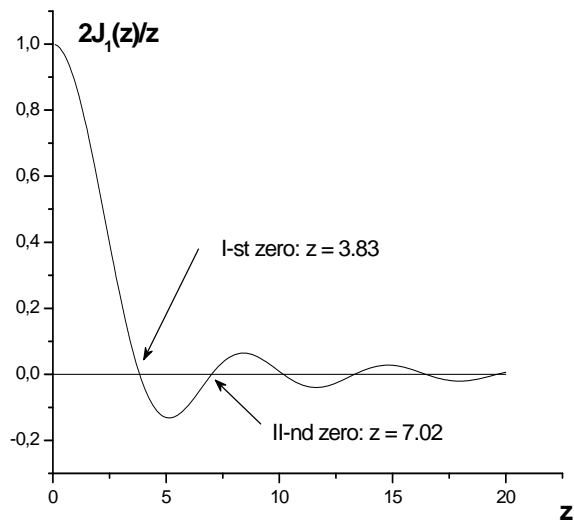
Фиг. 9.1

Ако диаметърът на входната зеница на обектива е равен на $2a$, то амплитудата в точка P от равнината π' ще бъде пропорционална на (виж фиг. 9.2)

$$f(\nu) = \frac{2J_1(Z)}{Z}, \text{ където } z = ka\nu, k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Разпределението на интензитета в околността на точка S' притежава централна симетрия и се нарича “кръгче на Ейри”. Както се вижда, този интензитет бързо спада с нарастването на радиуса z . За първия минимум имаме стойност на $\nu = \frac{1,22\lambda}{2a}$. Приемаме (от енергетични съображения), че линейният диаметър на дифракционното петно се равнява на два пъти радиуса на първия минимум. Или, ако $\overline{OS'} = 1$, то

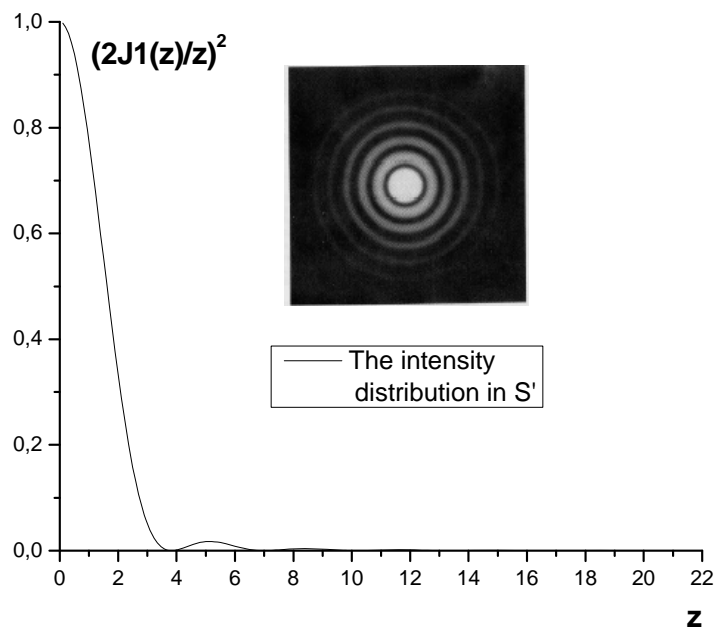
$$2\sqrt{l} = \frac{1,22\lambda l}{a} = \frac{1,22\lambda}{\alpha}, \text{ където } a/l = \alpha.$$



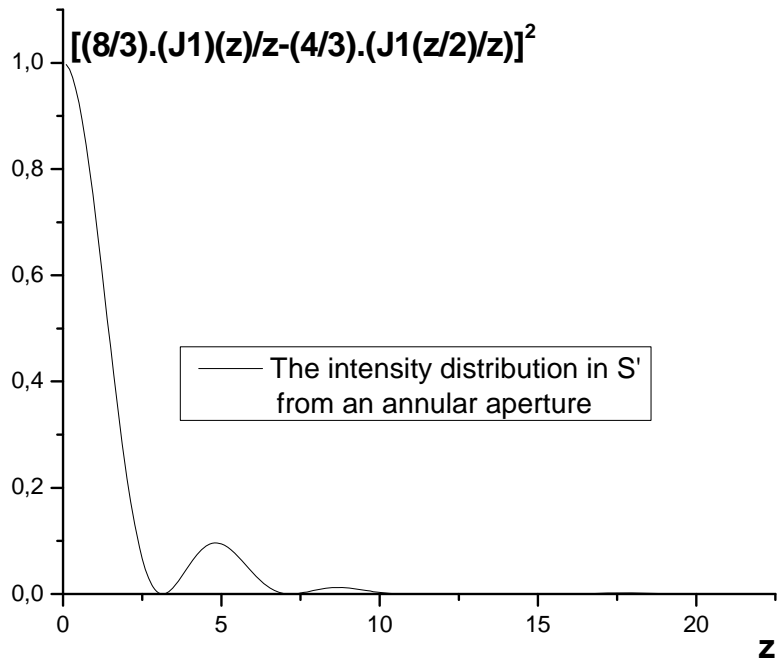
Фиг. 9.2

Разгледаният случай се отнася за кръгла апертура на обектива. При друга форма на апертурната бленда разпределението на интензитета в дифракционното петно е доста по-различно. Ето няколко примера:

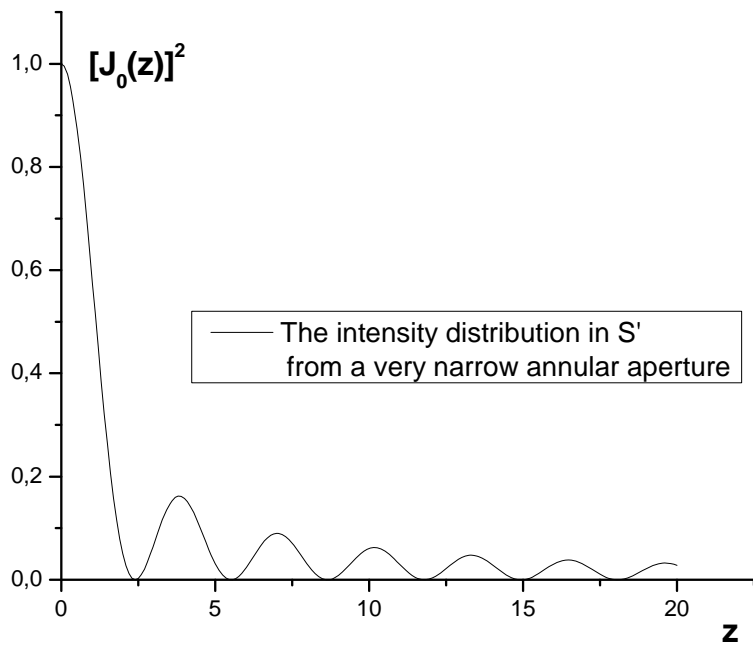
От апертура с кръгъл отвор:



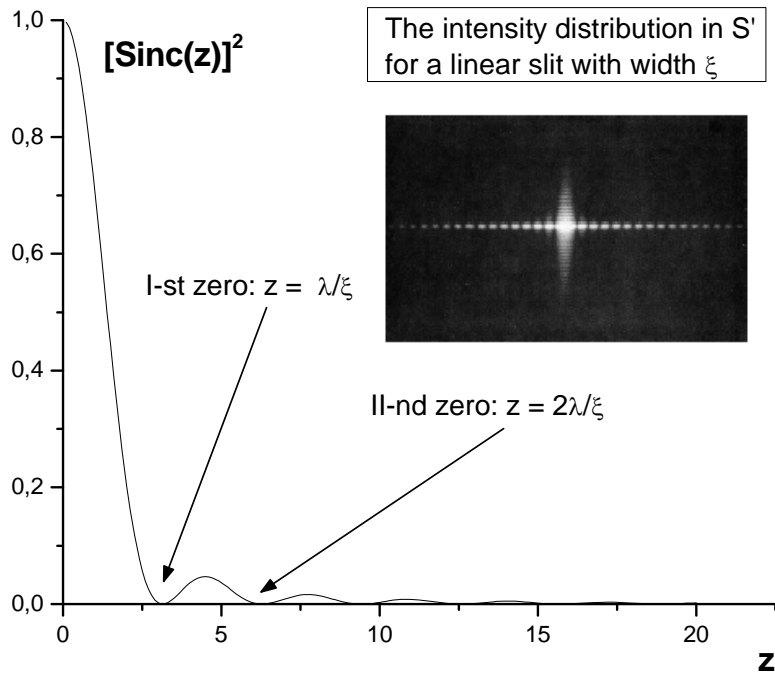
От кръгла, пръстеновидна апертура ($R/r = 2$):



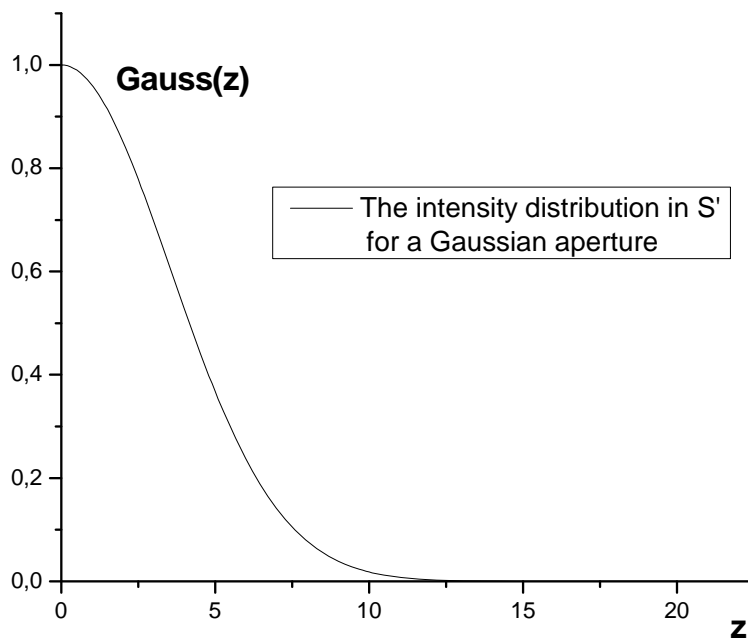
От кръгла, много тънка пръстеновидна апертура ($R/r \rightarrow 1$):



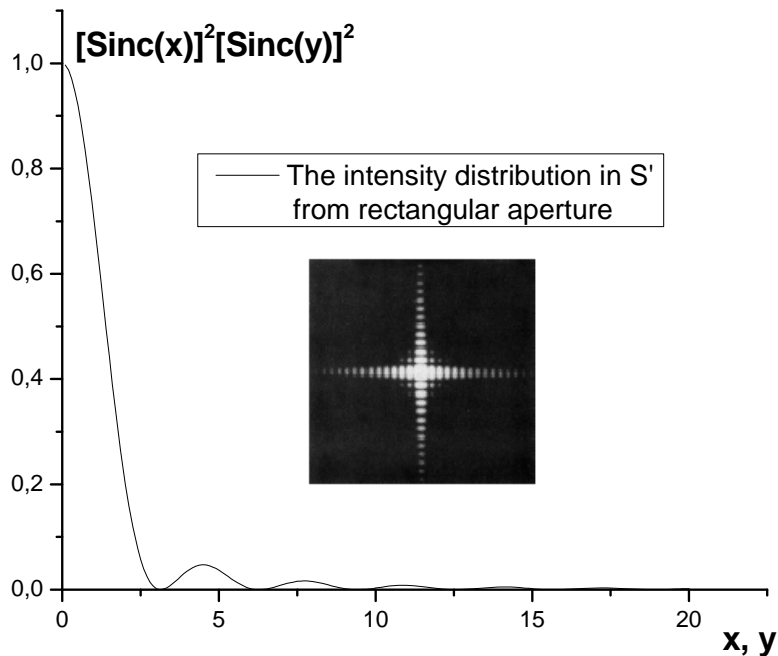
От линеен процеп с ширина ξ_0 :



От кръгла апертура с гаусов профил на пропускане:

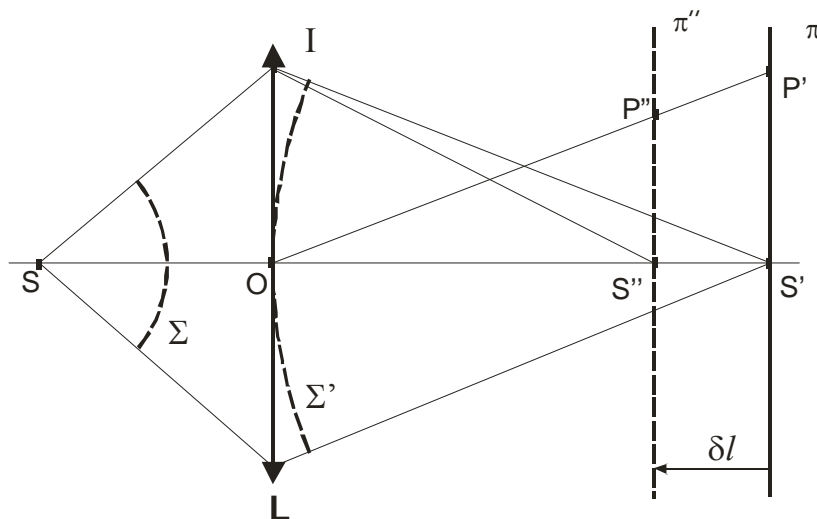


От правоъгълна апертура:



9.2 Образът на точка в случай на разфокусировка

Ако транслираме равнината на параксиалния образ (S') π' на разстояние δl , отсечка малка в сравнение с разстоянието $\overline{OS'}=1$, в новата равнина на наблюдение π'' следва да получим ново, различно от първоначалното разпределение на интензитета.



Фиг. 9.3

Нека L е идеален, безаберационен обектив и S' е центърът на сходящия вълнов фронт Σ' . Дифрактиралите от всяка точка на Σ' елементарни вълни (съгласно принципа на Хюйгенс) пристигат в S' във фаза, докато в т. S'' те пристигат с различна фаза. Максималната разлика в пътищата им до т. S'' е

$$\Delta = \overline{IS''} - \overline{OS''}$$

С появата на тази разлика се обяснява и влошаването на качеството на образа в S'' .

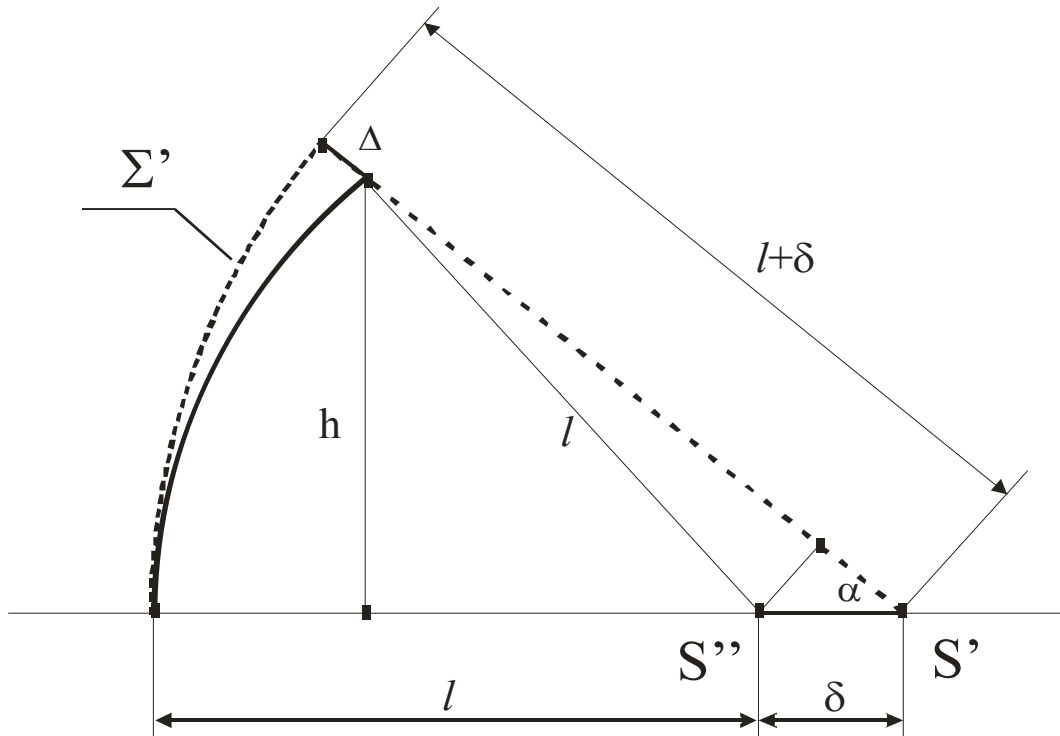
Не е трудно да се покаже, че

$$\Delta = \frac{\alpha^2}{2} \delta l$$

Доказателство:

$$\Delta = l + \delta - \delta \cdot \cos \alpha - l = \delta(1 - \cos \alpha)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \delta \cdot \sin^2 \alpha$$



Фиг. 9.4

Ако искаме дифракционната картина в S'' да не се различава от тази в S' , то би било необходимо $\Delta \ll \lambda$, или $\delta l \ll \frac{2\lambda}{\alpha^2}$. Разпределението на интензитета на

дифракциралата светлина в околността на т. S' в меридионална равнина, минаваща през оптичната ос и \perp на π' е показано на Фиг. 9.5:

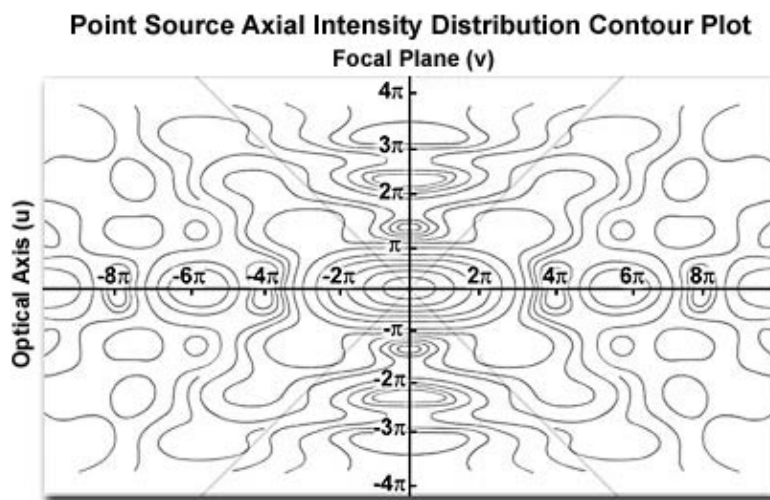
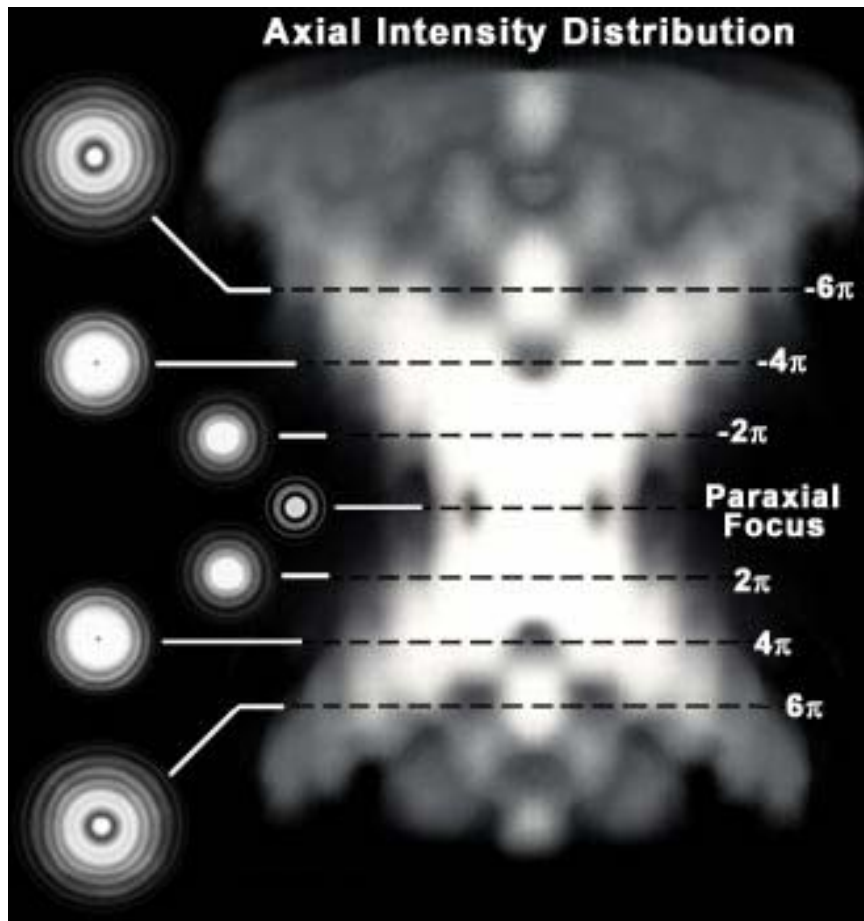
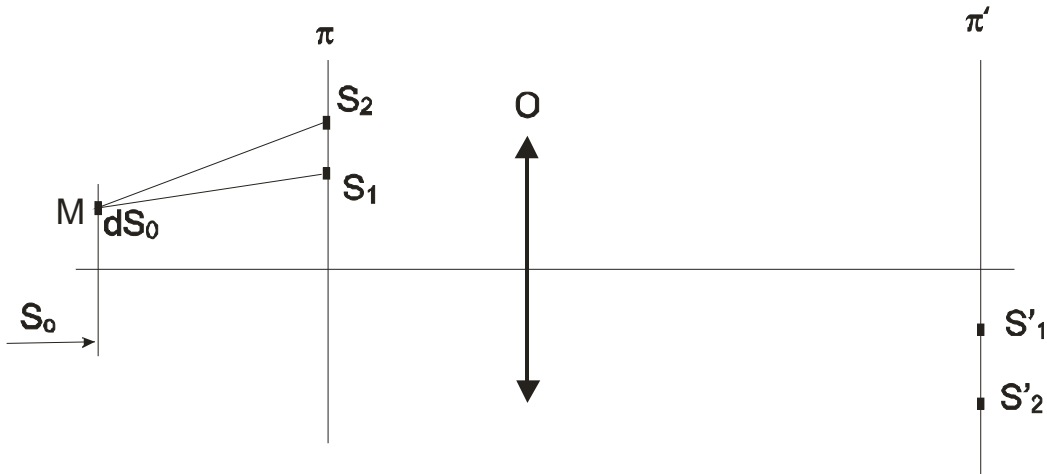


Figure 1

Фиг. 9.5

9.3 Образ на два съседни монохроматични точкови източници

Ако осветим екрана π (в който има два т. отвора S_1 и S_2) с пространствено некохерентен, хомогенен и монохроматичен източник S_0 , то в равнината π' ще получим дифракционните образи S_1' и S_2' на точковите източници, изобразени с обектива O .



Фиг. 9.6

Нека най-напред предположим, че върху π попада вълна само от dS_0 (с център в т.М). Вълните, дифрактирали на отворите S_1 и S_2 ще имат фазова разлика $\varphi = k\Delta$, където $\Delta = \overline{MS_1} - \overline{MS_2}$. Точковите отвори S_1 и S_2 , осветени с елемента dS_0 могат да бъдат разглеждат като кохерентни източници. За да намерим дифракционната картина в π' е необходимо да сумираме амплитудите, взимайки под внимание разликите във фазите; в случай, че $\varphi = \pi$ те се изваждат, а при $\varphi = 0$ се сумират.

Ако обходим с елемента dS_0 целия източник S_0 , то в резултат S_1 и S_2 ще бъдат некохерентни източници. Следователно, налага се да бъдат сумирани интензитетите. Разпределението на интензитета в равнината π' е:

$$i(\pi') = e_{(\pi')} * [\delta(S_1') + \delta(S_2')],$$

където $e_{(\pi')}$ е разпределението на интензитета в дифракционното петно от точков източник (“кръгчето на Ейри”), а $[\delta(S_1') + \delta(S_2')]$ описва геометричния образ на двойката секундарни източници S_1 и S_2 , осветени с площния, примарен източник

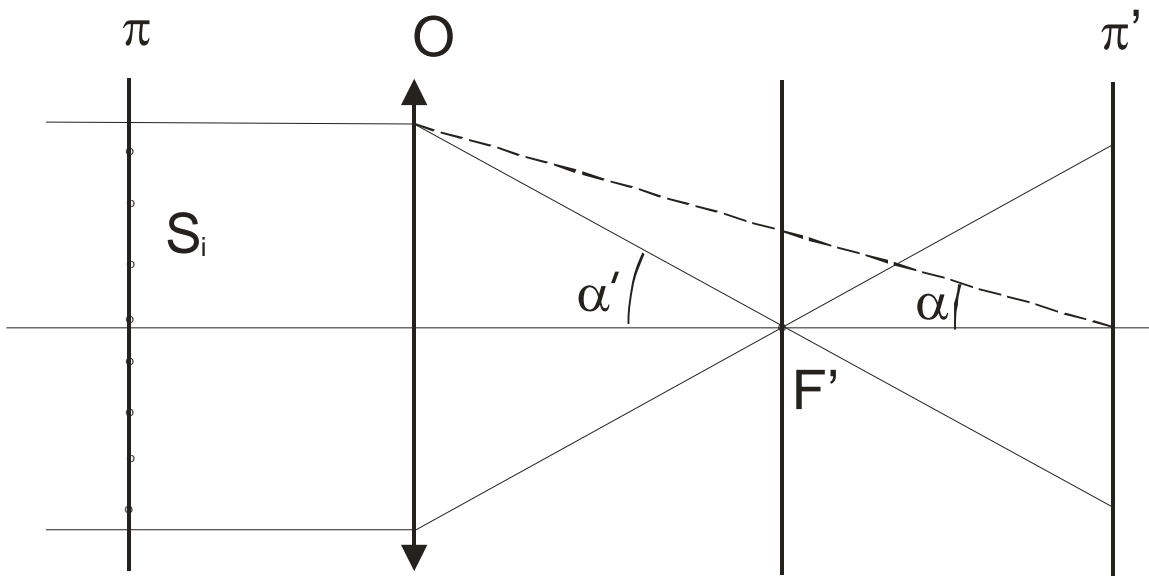
S_0 . От така получената амплитуда в π' следва да се пресметне разпределението на интензитета.

9.4 Образ на голям брой монохроматични точкови източници

Нека на екрана π има голям брой точкови източници ($S_1, S_2, S_3, \dots, S_i, \dots$), разположени хаотично и нека те бъдат изобразени с обектива О в равнината π' . Тогава образът на равнината π (съставен от отделните парциални образи) е кохерентна суперпозиция на отделните дифракционни картини (с оглед на фазата). Получава се сложна картина, наречена спекъл структура, в която размерът на най-малкото петно е равен на диаметъра на дифракционното петно, формирано от обектива О. Интензитетът, аналогично на т. 3, се получава като

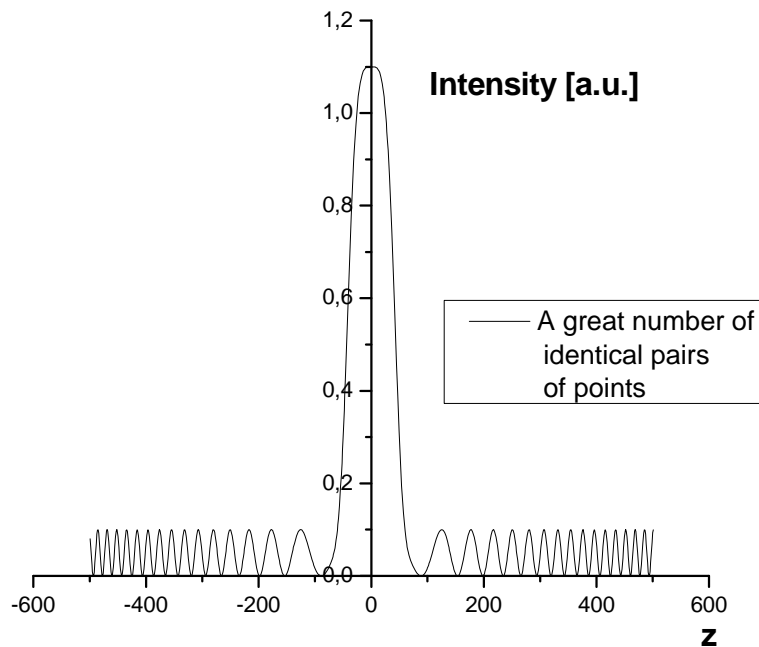
$$i(\pi') = e_{(\pi')} * \left[\sum_{i=1}^{\infty} \delta(S_i) \right]$$

Ако осветим екрана π с успореден сноп светлина (фиг. 9.7)



Фиг. 9.7

то във фокалната равнина F' ще имаме примерно такова разпределение на интензитета (фиг. 9.8):

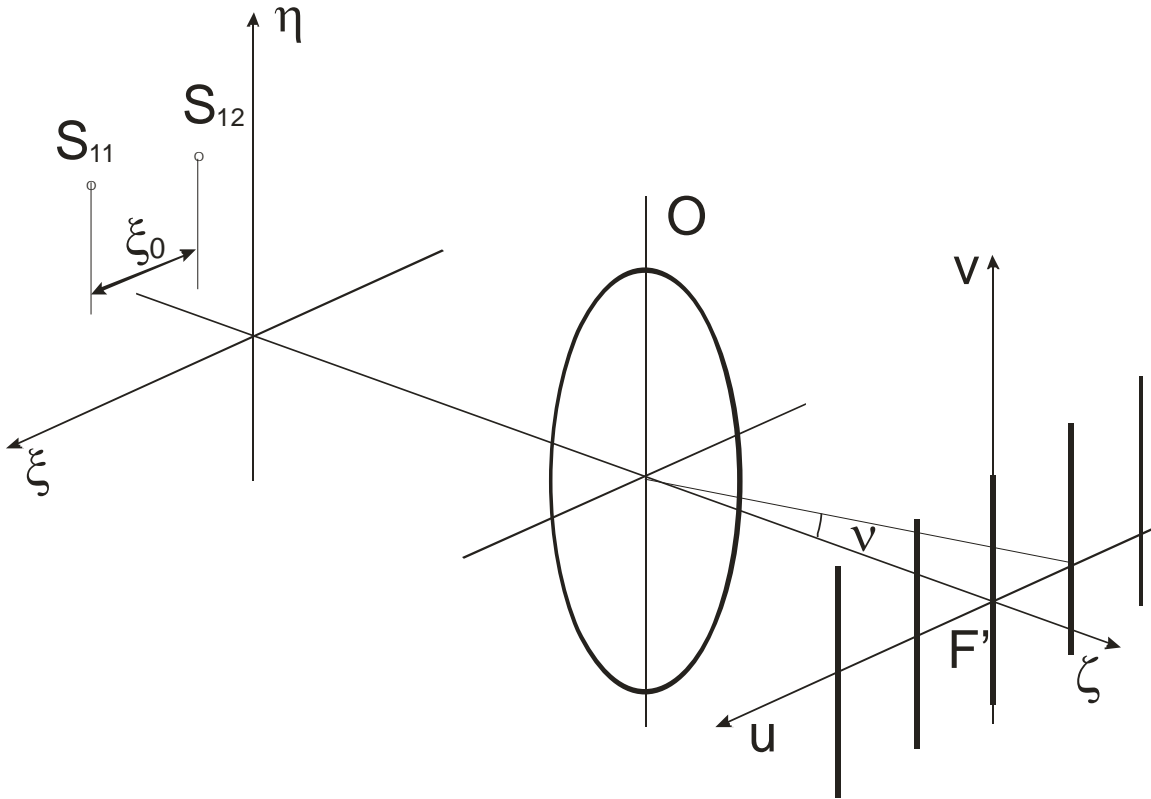


Фиг. 9.8

Структурата в равнината F' е по-фина от тази в равнината π' . Това се дължи на факта, че $\alpha' > \alpha$.

9.5 Фурие спектър на система от хаотични, но еднакви точкови двойки

Нека в равнината π са разположени безброй много хаотично разпределени двойки от малки източници: $(S_{11}, S_{12}), (S_{21}, S_{22}), (S_{31}, S_{32}) \dots (S_{i1}, S_{i2}) \dots$. Разстоянието между отворите във всяка двойка нека да бъде ξ_0 и нека отсечките, свързващи центровете на отворите във всяка двойка, да бъдат успоредни помежду си. Такъв линейно ориентиран “двоичен” точков екран може да се получи чрез трансляция на подобен на него единичен екран $(S_{11}, S_{21}, S_{31}, \dots)$ на разстояние ξ_0 (напр., чрез трансляционен шийринг). Както и при опита на Юнг, ще получим прави, успоредни ивици, перпендикулярни на посоката на трансляция $(\overline{S_{i1}S_{i2}})$, но интензитетът е N пъти по-висок (където N е броя на двойките).



Фиг. 9.9

Ъгловото разстояние между две съседни тъмни (или светли) ивици, измерено от центъра на изходната зеница O на обектива е

$$\nu = \frac{\lambda}{\xi_0} .$$

Ако представим системата точковите източници от единичният екран $S_{11}, S_{21}, S_{31}, \dots$ с функцията $D(\eta, \xi)$ (функцията $D(\eta, \xi)$ описва разпределението на комплексната амплитуда на полето в равнината (ξ, η) , а не геометричното разпределение на източниците в тази равнина), то амплитудната пропускливост на “двоичният” екранът π с пълният набор от точкови източници, можем да представим като

$$T(\eta, \xi) = D(\eta, \xi) * [\delta(\eta, \xi) + \delta(\eta, \xi - \xi_0)]$$

Спектърът на този транспарант е Фурие образа на функцията

$$T(\eta, \xi) = D(\eta, \xi) + D(\eta, \xi) * \delta(\eta, \xi - \xi_0),$$

където във втория член ще се прояви ефекта от трансляцията на ξ_0 .

Ако $F[D(\eta, \xi)] = \tilde{D}(u, v)$, то

$$F[T(\eta, \xi)] = \tilde{D}(u, v) \left[1 + \exp\left(i \frac{2\pi v \xi_0}{\lambda}\right) \right]$$

и интензитетът в равнината F' ще бъде:

$$I = |\tilde{D}(u, v)|^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi v \xi_0}{\lambda}$$

От тук се вижда, че дифузния фон (първият множител) е модулиран с ивица на Юнг (вторият множител).

Аналогично, нека разгледаме екран с идентични, успоредни помежду си, но хаотично разположени процепи, всеки с дължина ξ_0 . Нека те бъдат N на брой. Ако геометричното разпределение на множеството процепи се описва с функцията $D(\eta, \xi)$, а $\Pi(\xi/\xi_0)$ е амплитудата на полето във всеки отделен процеп, то полето, непосредствено зад екрана π , ще се опише с конволюцията:

$$D(\eta, \xi) * \Pi\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right).$$

Неговият Фурие-образ е:

$$\tilde{D}(u, v) \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi v \xi_0}{\lambda}}{\frac{\pi v \xi_0}{\lambda}} \right),$$

а интензитетът на полето е

$$|\tilde{D}(u, v)|^2 \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi v \xi_0}{\lambda}}{\frac{\pi v \xi_0}{\lambda}} \right)^2$$

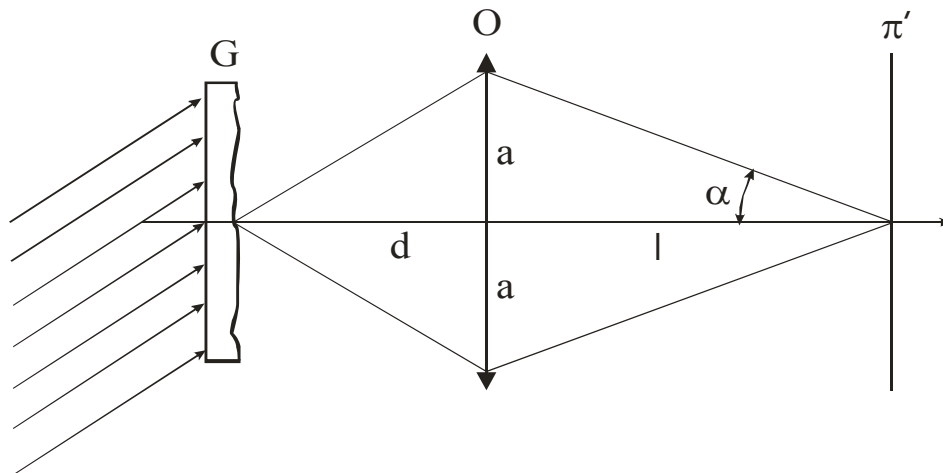
Дифузориите, с които се срещаме най-често на практика са основно два вида:

- отразителни. Това са предимно повърхности с естествен или съзнателно създаден микрорелеф.

- на пропускане. Към тях се числят различните видове матови стъкла.

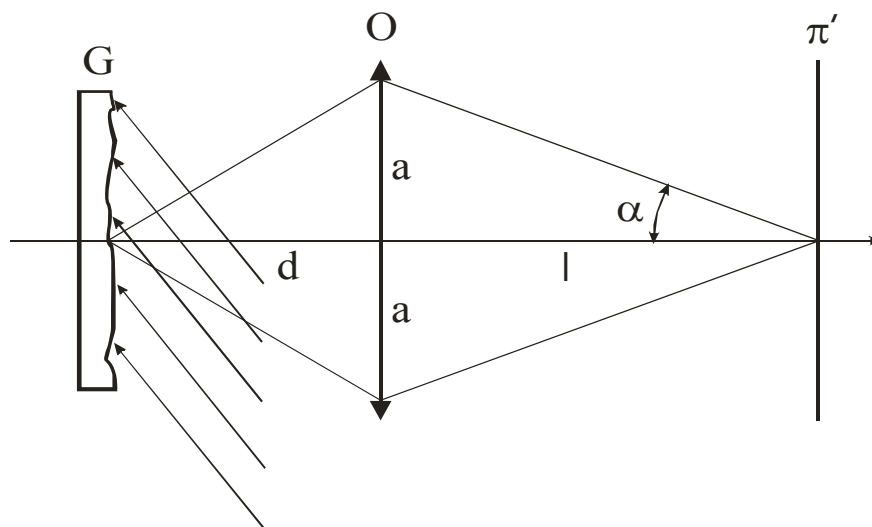
И към двата вида дифузори се отнасят системите с мътни среди.

Спекъл структура се получава при осветяване дифракционен обект с лазерна светлина. Ако прозрачен обект се освети с колимиран сноп (фиг. 9.10), то при негова трансляция в собствената му равнина, фазовите съотношения между интерфериращите вълни се запазват. Разпределението в спекъл структурата се запазва, като тя самата единствено следва преместването на обекта. Но, ако завъртим дифузьора G около ос, лежаща в неговата равнина, с изключение на случая на нормално падане, фазите се изменят.

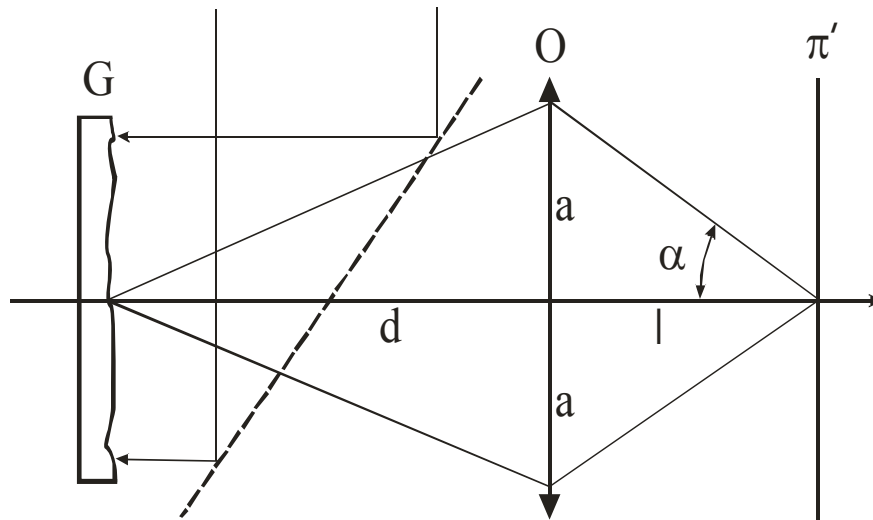


Фиг. 9.10

При отражателен дифузьор ситуацията е подобна (фиг. 9.11, фиг. 9.11a):

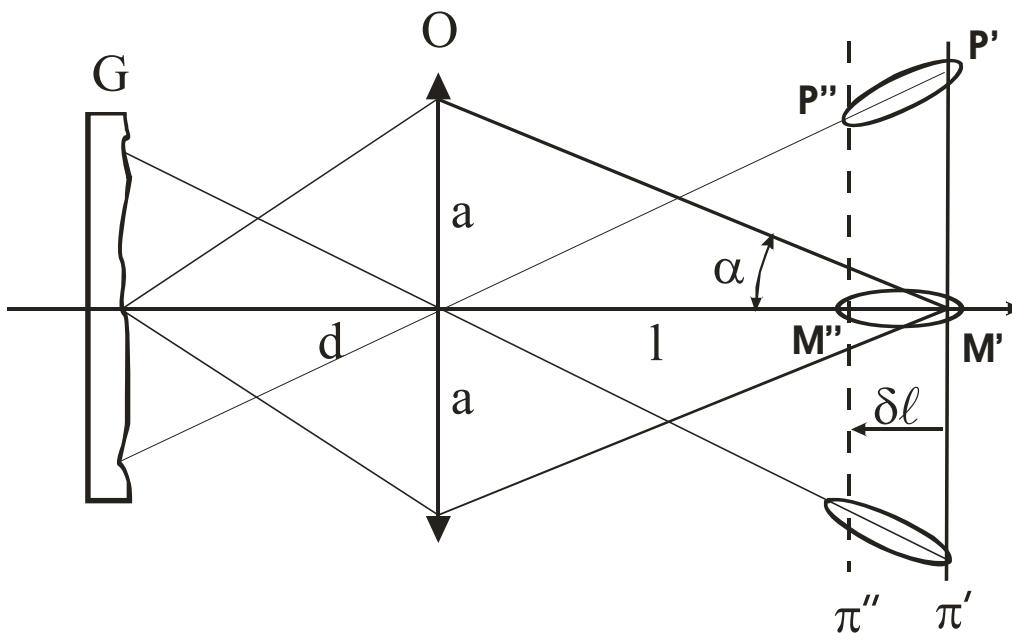


Фиг. 9.11



Фиг. 9.11a

9.6 Спекъл структура при изменение на равнината на наблюдение



Фиг. 9.12

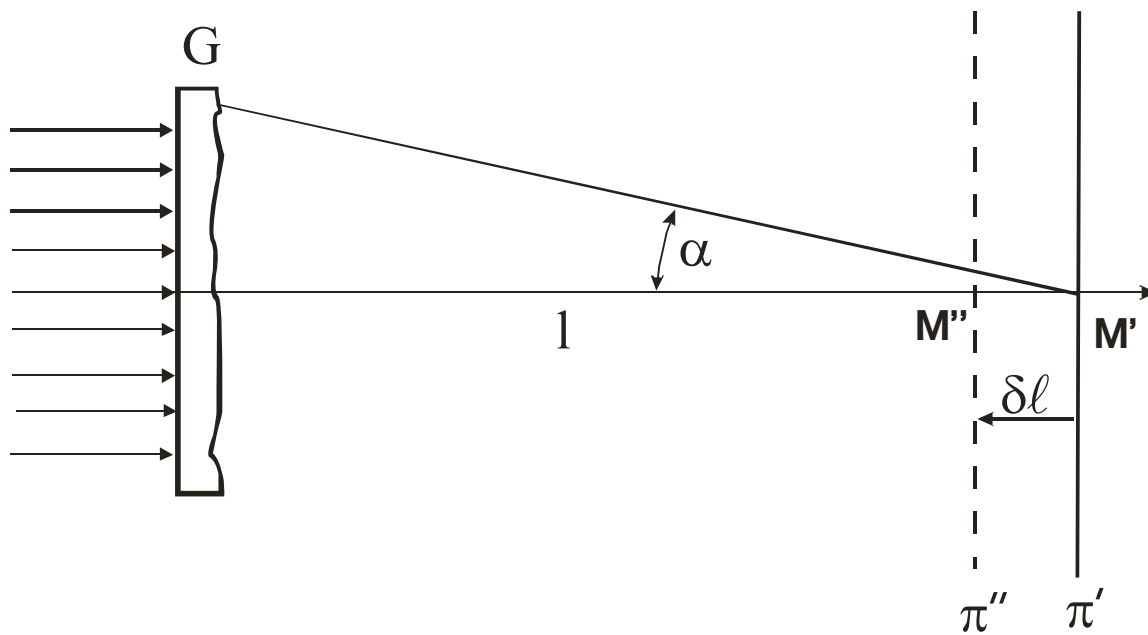
Вече се убедихме, че разпределението на интензитета в образа точка от дифузъора G има формата на овална “пура” с дължина $4\lambda/\alpha^2$ и диаметър $\lambda/2$. Ако

$\delta l < 2\lambda/\alpha^2$, то съществува корелация между спекъл структурите в π' и π'' . И в този случай съществува подобие между тях

$$\frac{M''P''}{M'P'} = \frac{l - \delta l}{l} = 1 - \frac{\delta l}{l}$$

Следователно, за увеличаване на коефициента на подобие трябва да се намали 2α при зададено δl .

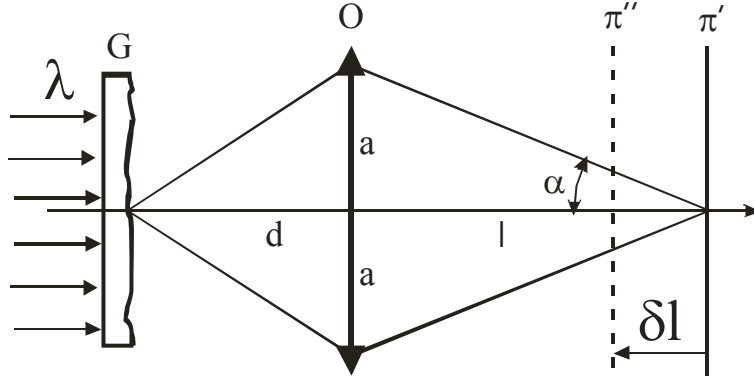
Аналогична е ситуацията, когато G и π' са неподвижни, а O мени положението си, а също така при осветяване на дифузьор за преминалата или отразена дифрактирала вълна са валидни същите разсъждения (фиг. 9.13),



Фиг. 9.13

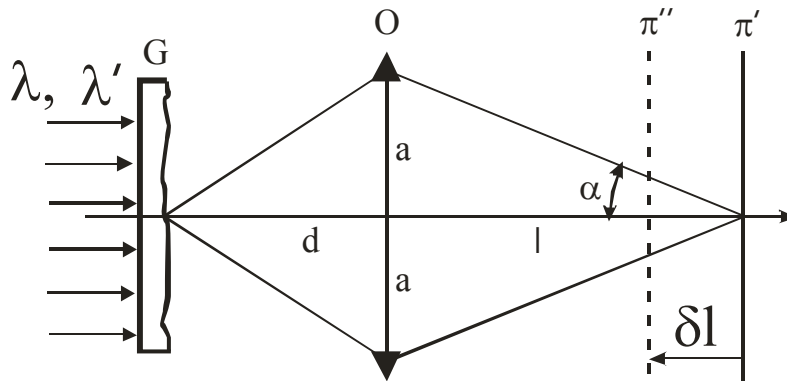
Като и тук е необходимо да бъде спазено условието: $\delta l < \frac{2\lambda}{\alpha^2}$

9.7. Корелация между спекъл структури в реални случаи



Фиг. 9.14

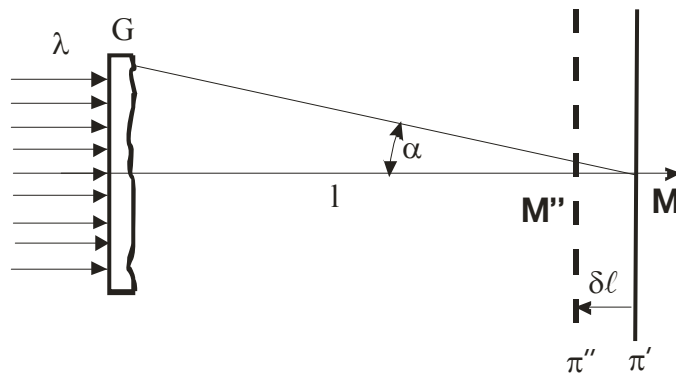
1. Спекъл структурите в π' и π'' (фиг. 9.14) са подобни с коефициент на подобие $1 - \frac{\delta l}{l}$ когато $\delta l \ll \frac{2\lambda}{\alpha^2}$



Фиг. 9.15

2. Спекъл структурите в π' (фиг. 9.15) са идентични при осветяване с λ или λ' , ако

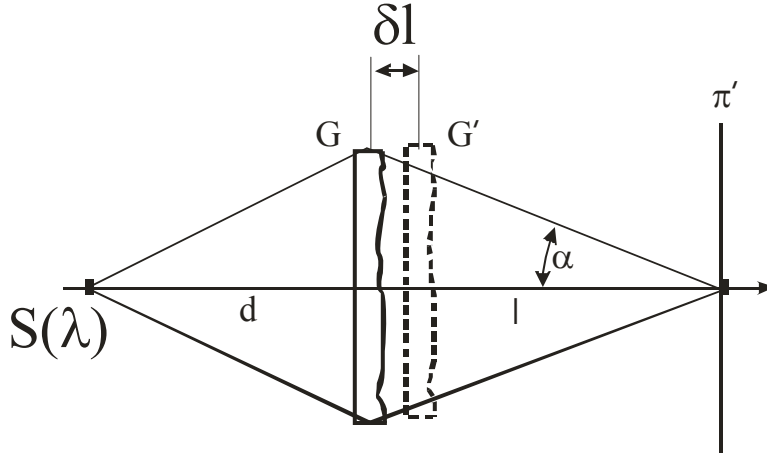
$$\Delta_G \frac{\delta \lambda}{\lambda^2} \ll 1, \quad \delta \lambda = \lambda - \lambda'.$$



Фиг. 9.16

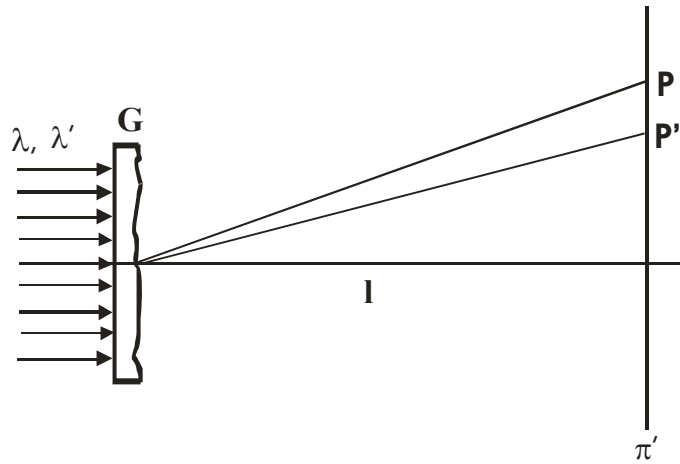
3. Спекъл структурите в равнините π' и π'' (фиг. 9.16) са подобни с коефициент на подобие

$$\left(1 - \frac{\delta l}{l}\right) \text{ при } \delta l \ll \frac{2\lambda}{\alpha^2}$$



Фиг. 9.17

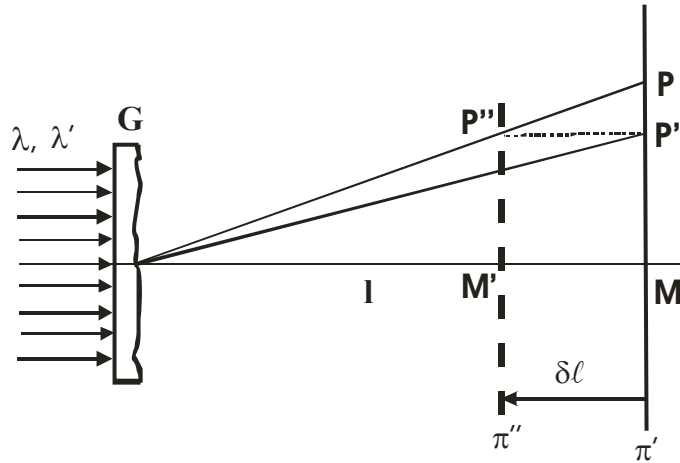
4. При трансляция на дифузъора (фиг. 9.17), спекъл структурите са подобни с коефициент на подобие $1 - \frac{\delta l}{l}$, даже при сравнително големи стойности на α , ако е добре изпълнено условието $d = l$.



Фиг. 9.18

5. В равнината π' (фиг. 9.18) спекъл структурите, получени съответно с източниците λ и λ' са подобни и с коефициент на подобие $1 - \frac{\delta l}{l}$ когато:

$$\frac{a^2 \delta\lambda}{2l\lambda^2} \ll 1, \quad \Delta_G \frac{\delta\lambda}{\lambda^2} \ll 1.$$



Фиг. 9.19

6. Спекъл структурата в π' , получена с източник λ е идентична с тази в равнината π'' , получена с източник λ' , ако е изпълнено:

$$\delta l = l \frac{\delta\lambda}{\lambda}; \quad \frac{a^2 \delta\lambda}{2 \lambda^2} \ll 1; \quad \text{и} \quad \Delta_G \frac{\delta\lambda}{\lambda^2} \ll 1.$$

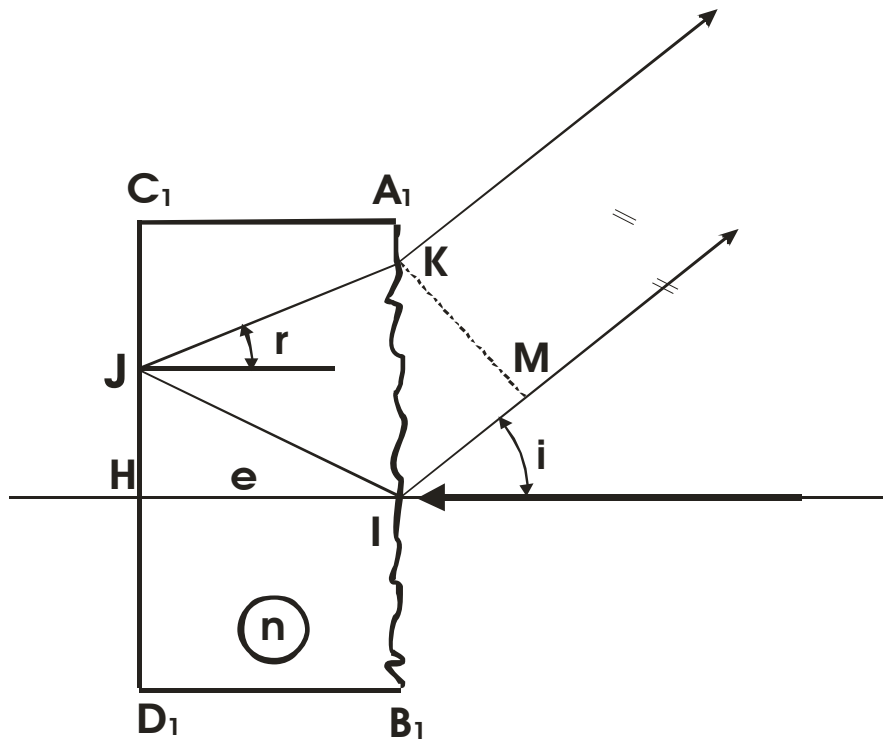
9.8. Интерференция в дифузна светлина

Един интересен експеримент демонстрира възможността да се наблюдават интерференция на дифузна светлина. Оптичната система (фиг.9.20) е стъклена планпаралелна пластина, едната повърхност на която е матирана, а втората отразителна. Върху грапавата повърхност в точка I пада нормално тесен сноп лъчи. Една част от него дифузно се отразява (примерно под ъгъл i), а останалата част прониква дифузно в пластината и се отразява от огледалната повърхност (примерно под ъгъл r). Отразеното поле напуска пластината отново дифузно през грапавата повърхност. Ако с подходяща оптична система селектираме само успоредни помежду си лъчи от първото и от последното полета, то в далечната зона има вероятност да наблюдаваме интерференция. Цялостният вид на експеримента е показан на фиг. 10.21. Разликата в оптичните пътища между интерфериращите лъчи е:

$$\Delta = 2n\overline{IH} + \overline{IM} - 2n\overline{IJ} = 2nl(1 - \cos r)$$

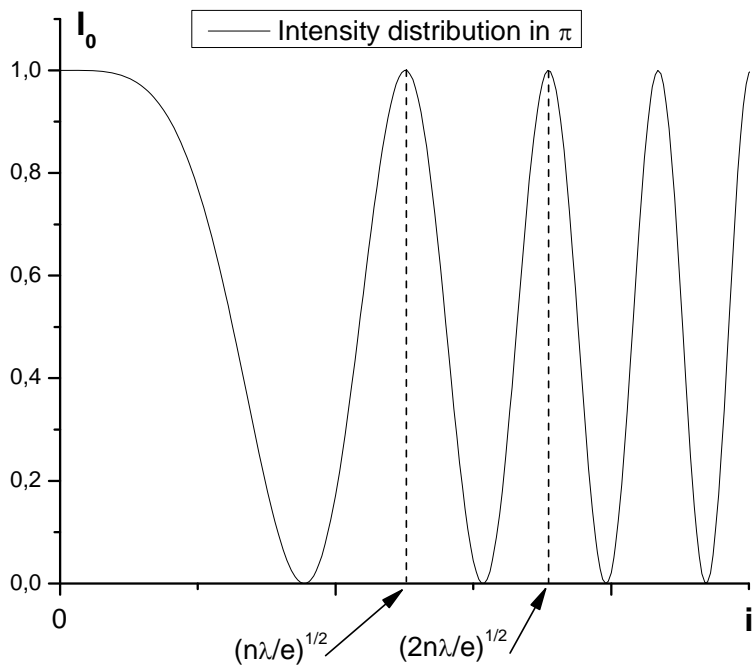
и, ако ъглите i и r са малки:

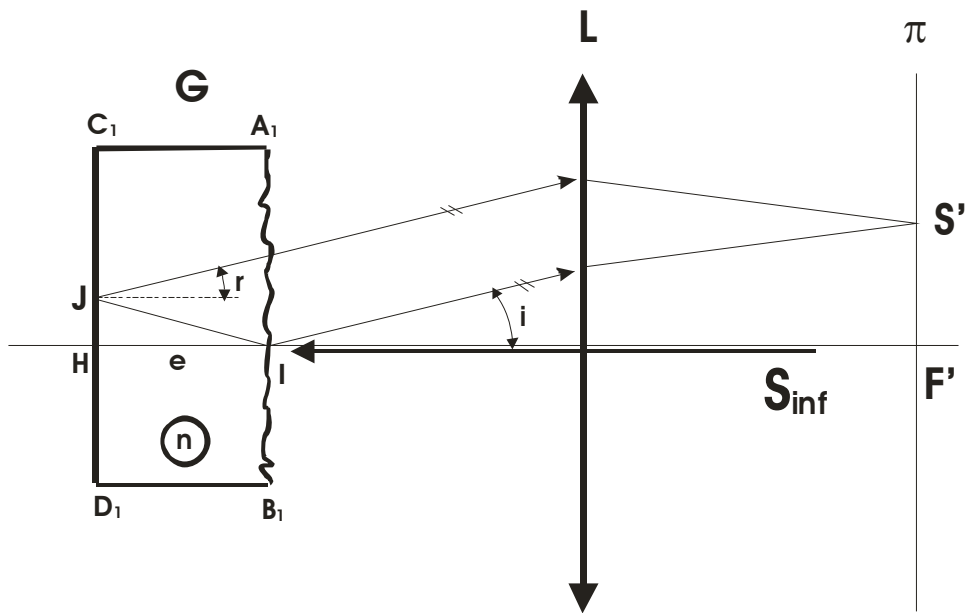
$$\Delta \approx \frac{ei^2}{n}$$



Фиг. 9.20

Разпределението на интензитета на интерференционните ивици има следния вид:





Фиг. 9.21

Ъгловите координати на светлите ивици се определят от условието:

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{ei^2}{n\lambda} = p$$

където p трябва да бъде цяло число. Или чрез ъгълът на дифракция i

$$i = \sqrt{\frac{n\lambda p}{e}}$$

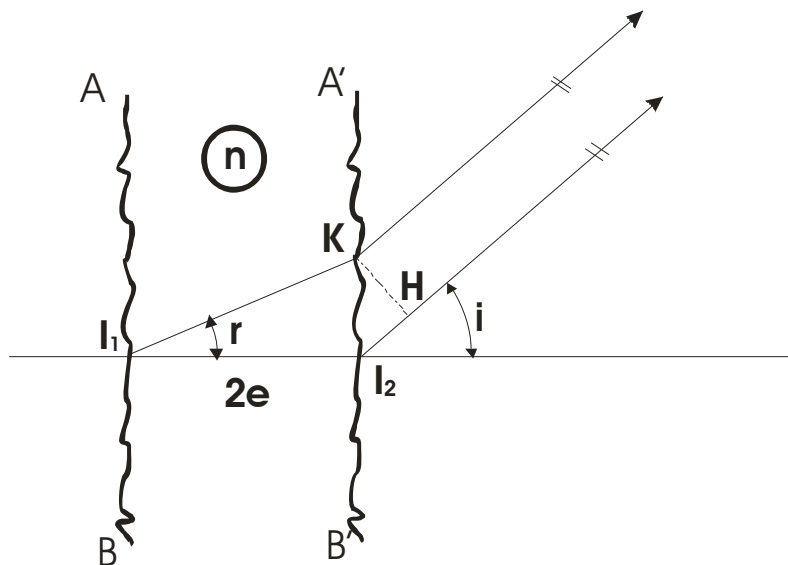
Например, при $p = 1$ наблюдаваме първата светла ивица и т.н.

Този случай може да бъде разглеждан като интерференция от два идентични дифузора AB и $A'B'$ на разстояние $2e$. $A'B'$ е образът на AB в огледалото C_1D_1 (Фиг. 9.20). За разликата в оптичните пътища са валидни същите съотношения.

В оптичката практика тази схема се реализира с два идентични дифузора, напр. две фото регистрации на Фурие спектър. (виж глава 10.10). Разликата в оптичните пътища е

$$\Delta = I_1 I_2 - I_1 H = ei^2,$$

което води до резултат идентичен с предходния.

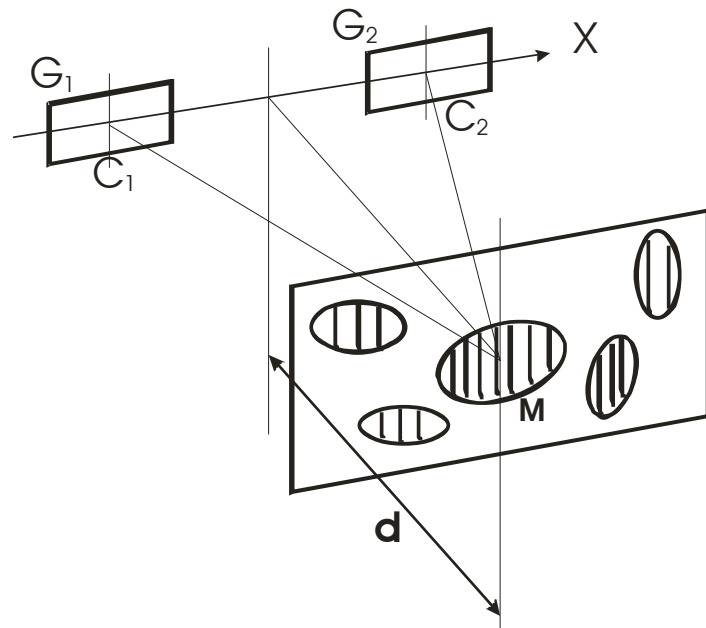


Фиг. 9.22

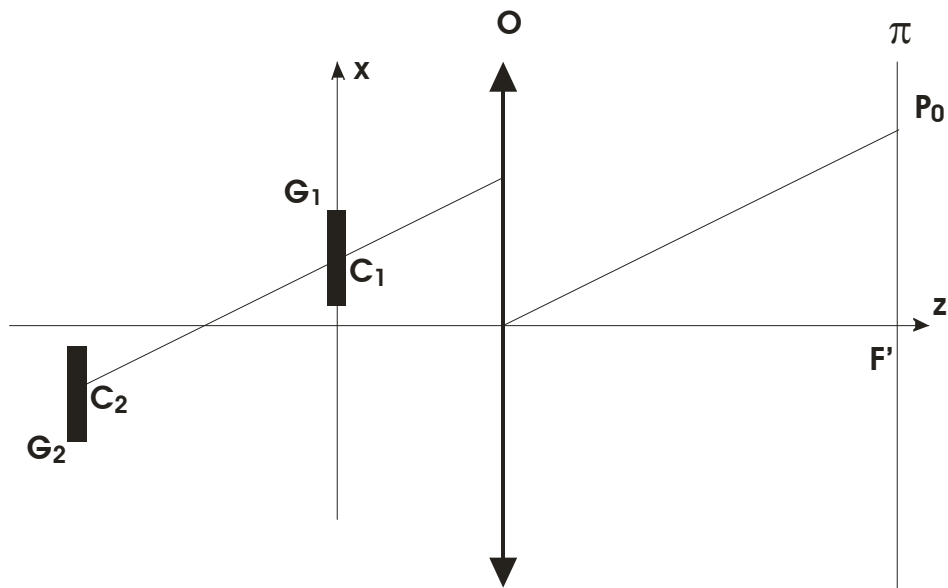
9.9. Интерференция от два не еднакви дифузьора

Там, където петната от двете спекъл структури съвпадат (фиг. 9.23), наблюдаваме запълването им с прави, успоредни интерференционни ивици на Юнг с период $\lambda d / \overline{C_1 C_2}$. Тъй като амплитудите в петната са практически равни, контрастът е максимален. Между отделните системи ивици, запълващи всяко от петната няма взаимна връзка, тъй като средното фазовото отместване за всяко петно е произволно. Ако отместим матовите стъкла в посока на оста x , резултантната спекъл структура ще се промени, а също и разстоянието между ивиците във всяко от петната, но ивиците ще останат прави и успоредни помежду си. Същата ситуация ще наблюдаваме, ако между матовите стъкла и екрана разположим обектив, и то така, че екранът да лежи в неговата фокална равнина.

Ако в схемата с Фурие обектив (фиг. 9.24) единият дифузьор (например G_2) отместим надлъжно, то спекъл структурата във фокалната равнина, създадена от G_2 ще се запази, както и резултантната структура от G_1 и G_2 . Но ивиците в петната ще са закривени, концентрични с център в точка P_0 , отново без връзка помежду си. Тази точка е пресечницата на права минаваща през центъра на изходната зеница на обектива O и отсечката $\overline{C_1 C_2}$ с фокалната равнина.



Фиг. 9.23



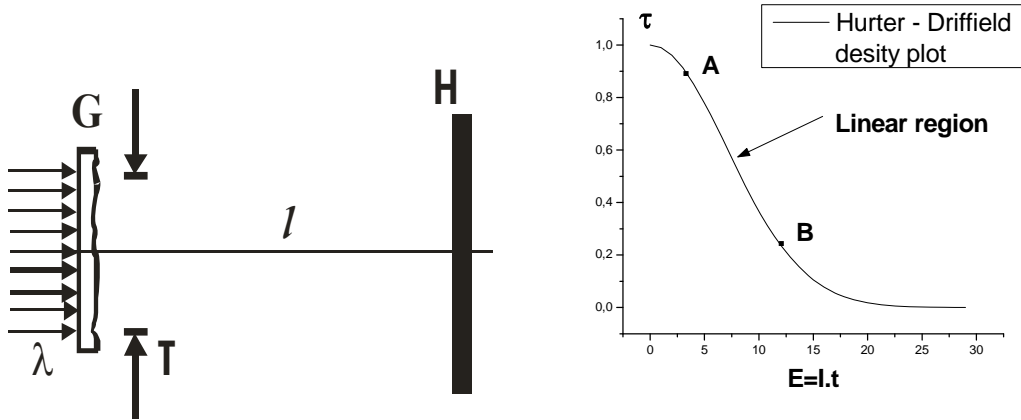
Фиг. 9.24

9.10. Интерференция при фото-суперпозиция на спекъл структури. Опит на Бърч и Токарски. Интерферометър на Бърч

Спекъл структурата в равнината на холограмата H се характеризира с разпределение на интензитета $D(\xi, \eta)$. Експозицията на фото плаката е

$E = t.D(\xi, \eta)$. Пропускането на негатива е $\tau = \tau(E)$. В линейният участък АВ на кривата на почерняване на негатива (Хертер – Дрифийлдовата крива, фиг. 9.25) коефициента на пропускане на транспаранта ще бъде:

$$\tau = a - b.D(\xi, \eta)$$



Фиг. 9.25

Експериментът на Бърч и Токарски: Нека върху холограмата Н направим регистрация на структура $D(\xi, \eta)$, след което транслираме Н на ξ_0 и извършим повторна експозиция. При константни условия на експозиция ще регистрираме разпределение на интензитета

$$D(\xi, \eta) + D(\xi - \xi_0, \eta),$$

или

$$D(\xi, \eta) * [\delta(\xi, \eta) + \delta(\xi - \xi_0, \eta)].$$

Пропускането на негатива ще бъде:

$$\tau = a - b.D(\xi, \eta) * [\delta(\xi, \eta) + \delta(\xi - \xi_0, \eta)].$$

И следва да си зададем въпроса, какъв е спектъра на този транспарант?

$$\tilde{\tau}(u, v) = a.\delta(u, v) - b.\tilde{D}(u, v) \cdot \left[1 + e^{i \frac{2\pi v \xi_0}{\lambda}} \right].$$

Първият член е образа на точковият източник, разположен в $-\infty$. Дифузърът $D(\xi, \eta)$ е с фина структура, за това $D(\xi, \eta)$ е силно разтегната в равнината F. Ако

мислено пренебрегнем точковият образ, интензитетът във фокалната равнина ще бъде:

$$I(u, v) = \left| \tilde{D}(u, v) \right|^2 \left| 1 + e^{i \frac{2\pi v \xi_0}{\lambda}} \right|^2 = \left| \tilde{D}(u, v) \right|^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi v \xi_0}{\lambda} \right).$$

Ъгловото разстояние между съседните ивици е $v = \lambda / \xi_0$.

Ако ли пък експозициите не са равни, то:

$$D(\xi, \eta) * [B_1 \cdot \delta(\xi, \eta) + B_2 \cdot \delta(\xi - \xi_0, \eta)]$$

$$I(u, v) = \left| \tilde{D}(u, v) \right|^2 \cdot \left[B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos \left(\frac{2\pi v \xi_0}{\lambda} \right) \right]$$

и контраста е $V = \frac{2B_1 B_2}{B_1^2 + B_2^2}$.

Необходимо е да се отбележи, че същият ефект се наблюдава, ако трансляцията се извърши с дифузьора вместо с холограмата.

Този експеримент можем да повторим с голям брой еднакви експозиции и еднакви еднопосочни трансляции ξ_0 . Тогава регистрираното разпределение ще има вида:

$$D(\xi, \eta) * \sum_{n=0}^{n=N} \delta(\xi - n \cdot \xi_0, \eta),$$

а разпределението на интензитета във фокалната равнина (фиг. 10.26):

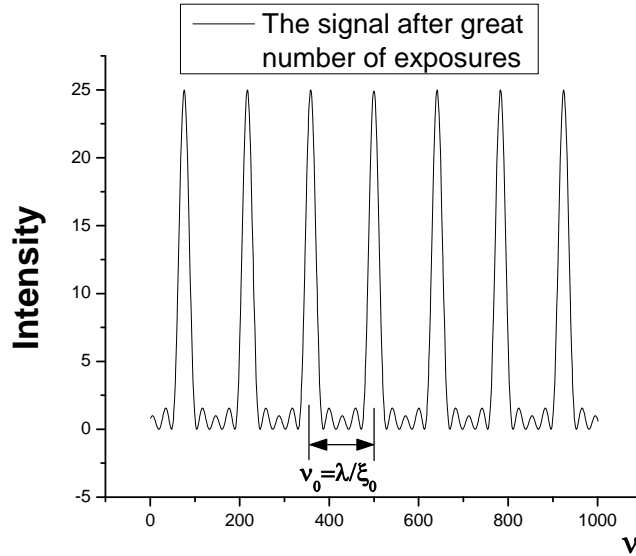
$$I(u, v) = \left| \tilde{D}(u, v) \right|^2 \cdot \left\{ \frac{\sin[(N+1)(2\pi v \xi_0 / \lambda)]}{\sin(2\pi v \xi_0 / \lambda)} \right\}^2.$$

Ив граничен преход, при много голям брой експозиции ($N \rightarrow \infty$) и, ако успеем все пак да останем в рамките на динамичния диапазон на емулсията, то интензитета на сигнала клони към Дираков гребен (фиг. 9.26):

$$D(\xi, \eta) * \text{comb} \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)$$

и тогава

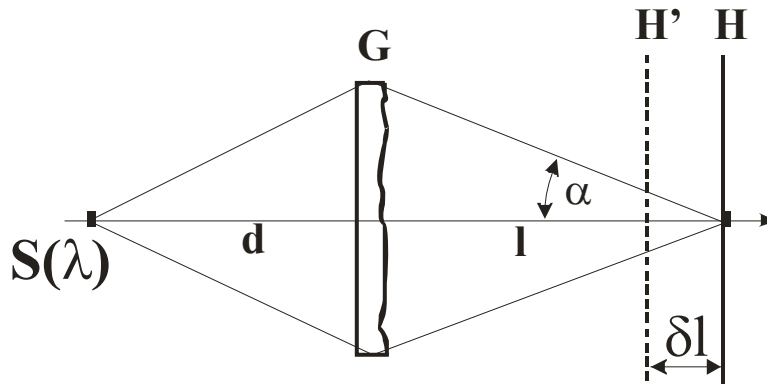
$$I(u, v) = |D(u, v)|^2 * \text{comb}\left(\frac{u}{u_0}\right).$$



Фиг. 9.26

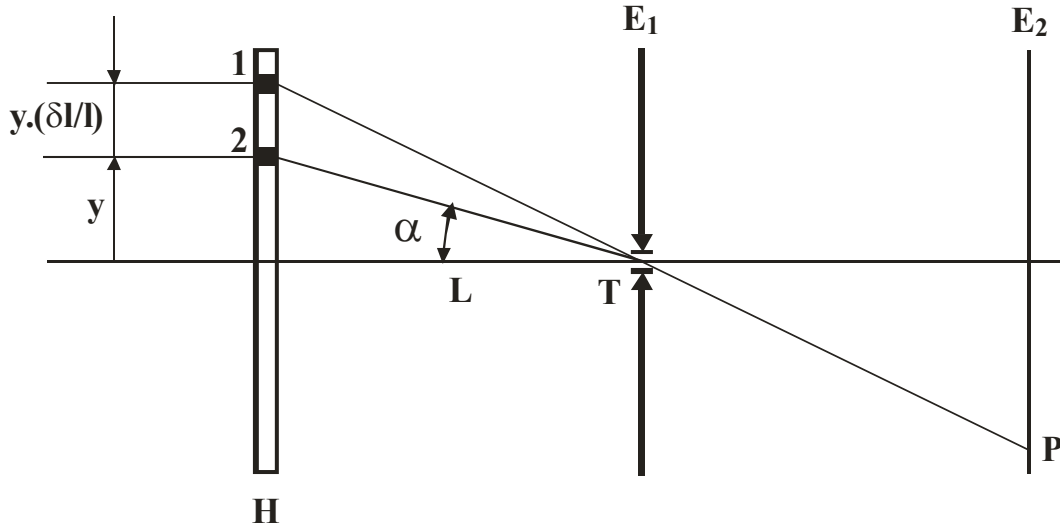
9.11. Интерференционни пръстени от запис на две спекъл структури

При този експеримент върху холограмата Н се регистрира спекъл структура от дифузъора G, след което последния се транслира надлъжно на разстояние δl , $\delta l \ll \frac{2\lambda}{\alpha^2}$ и се прави втори запис (фиг. 9.27). Регистрираните спекъл структури



Фиг. 9.27

са с коефициент на подобие $1 - \frac{\delta l}{l}$. Това означава, че ако на негativa на разстояние y от оптичната ос има определена структура, то на разстояние $y \frac{\delta l}{l}$ има подобна на нея (фиг. 9.28):



Фиг. 9.28

Ако холограмата Н бъде осветена с успореден сноп, то в точка Т от оптичната ос разликата в оптичните пътища ще бъде

$$\Delta = y \frac{\delta l}{l} \alpha = y^2 \frac{\delta l}{l}.$$

Ако на разстояние L от Н, точка Т, разположим екран E_1 с малък отвор в центъра, то върху втори екран E_2 ще наблюдаваме интерференчна картина на вълните генерирани от две точки: 1 и 2. Интензитетът на ивиците се описва с :

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi \Delta}{\lambda} \right) = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi \cdot \delta l}{l L} \frac{y^2}{\lambda} \right).$$

Пренебрегвайки дифракцията върху отвора Т в E_1 можем да кажем, че в околността на точка Р от E_2 важи същото разпределение. Радиусът на светлите ивици се определя от закона:

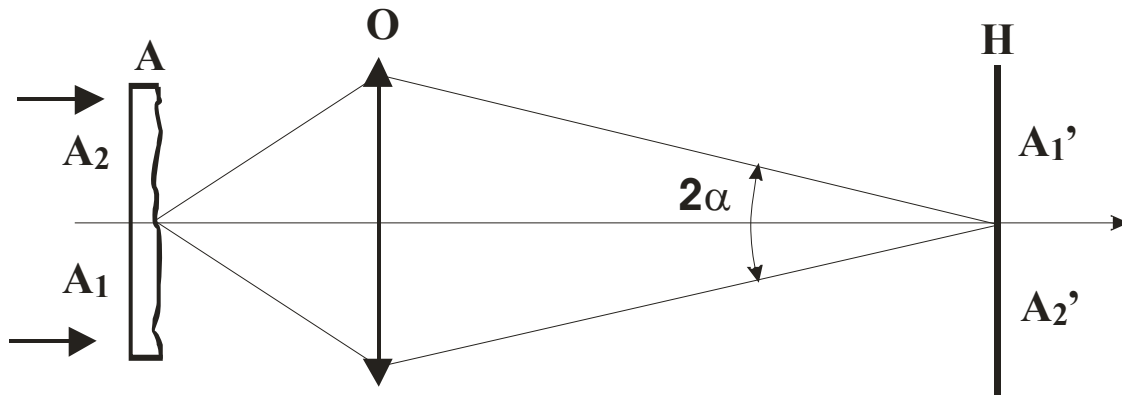
$$y = \sqrt{\frac{\lambda l L}{\delta l}} \sqrt{p},$$

където p е цяло число.

9.12. Регистрация на напречно преместване на дифузен обект.

А. Случай, когато преместването е по-голямо от диаметъра на петното

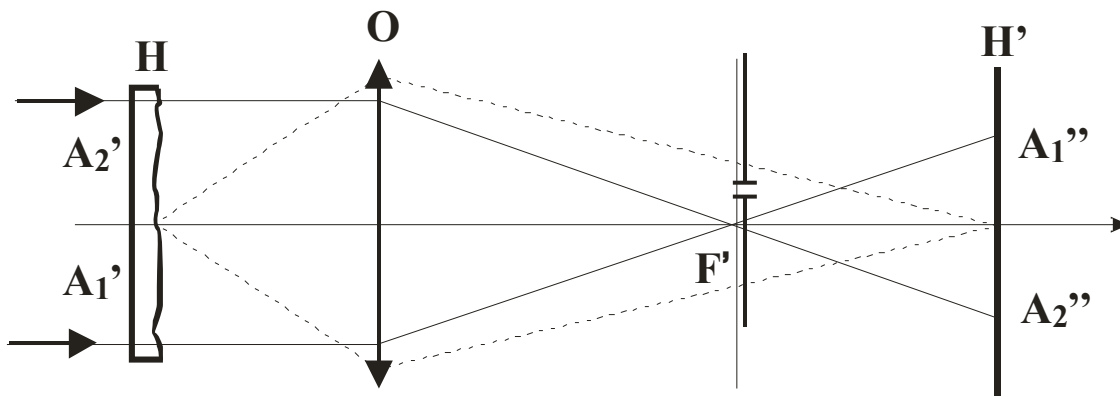
Първата стъпка в този експеримент е запис на спекъл структурата от обекта. Без загуба на общност предполагаме, че обекта А (фиг. 9.29) се състои от две части: A_1 и A_2 . Нека A_1 е неподвижна, а A_2 да търпи напречна (перпендикулярна на оптичната ос) трансляция. Реда на операциите е следния:



Фиг. 9.29

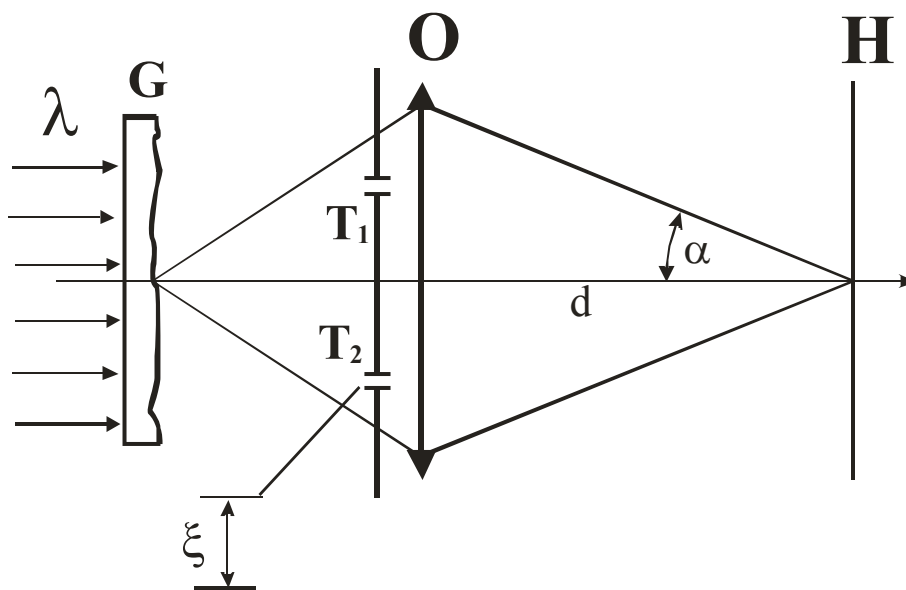
1. първа експозиция, при която се регистрира структурата от целия обект. В равнината на холограмата ще се запишат съответно образите A_1' и A_2' .
2. деформираме А като преместим A_2 и експонираме отново. Новият образ A_2'' е различен от A_2' .
3. между тези две експозиции транслираме Н на ξ_0 в собствената и равнина, но в произволна посока. Така в областта на A_1' се регистрират две идентични спекъл структури, докато в областта A_2' те са различни.
4. обработка на негатива.

Обработката на информацията е съгласно схемата, показана на Фиг. 9.30. В равнината F елементът A_1' създава система ивици на разстояние λ/ξ_0 . Елементът A_2' създава друга система ивици в зависимост от посоката на преместване и разстояние между тях вече не е равно на λ/ξ_0 .



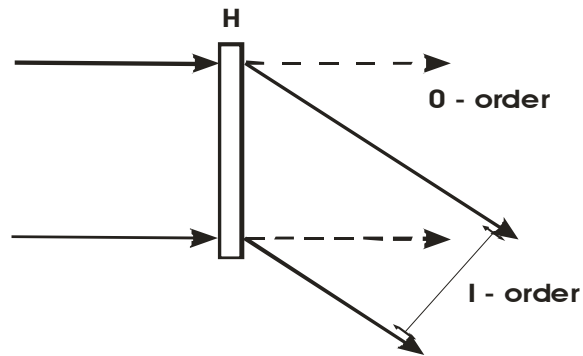
Фиг. 9.30

Б. Случай, когато преместването е по-малко от диаметъра на петното



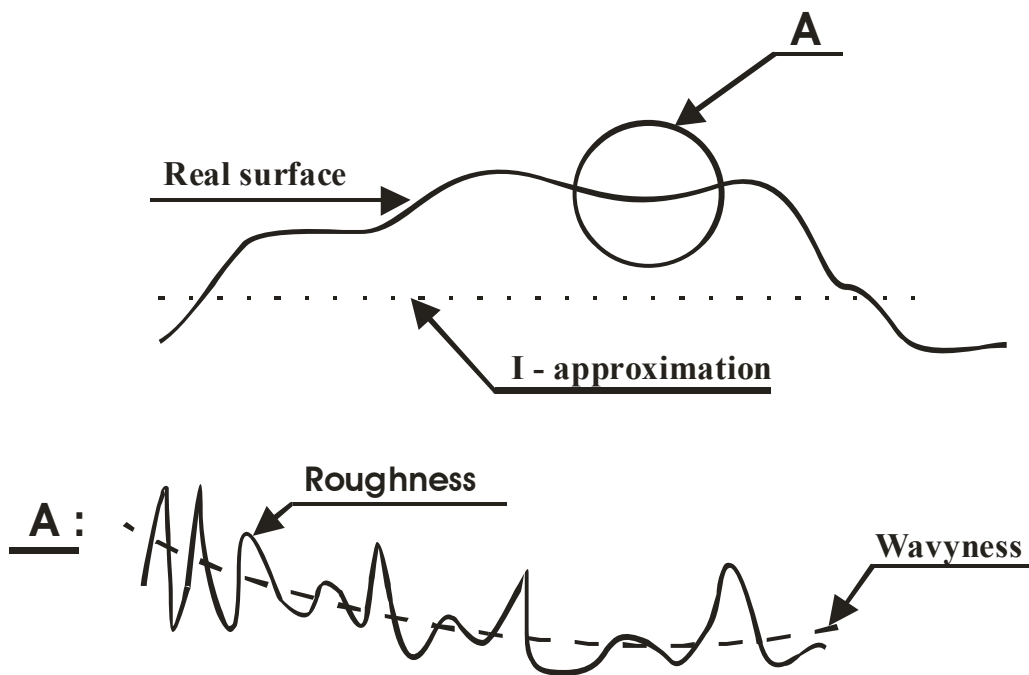
Фиг. 9.31

Аналогично на опита с двата дифузора G_1 и G_2 , T_1 и T_2 дават две различни спекъл структури. Във всяко спекъл петно в H се наблюдават успоредни ивици на Юнг на разстояние $(\lambda d / \overline{T_1 T_2})$. Предполагаме, че за диаметъра на блендичките в T_1 и T_2 е валидно условието: $\xi \ll \overline{T_1 T_2}$. При регистрацията се правят отново две експозиции, а реконструкцията е показана на фиг. 9.32.



Фиг. 10.32

9.13. Контрол на грапавости



Фиг. 9.33

Границата между две среди е основен оптичен обект. Но такава една граница, получена в резултат на някакъв природен или технологичен процес, значително се отличава от идеалните математически форми, които използваме, за да моделираме нашите идеи. А дали реалната повърхност ще изпълнява желаната функция или не, е единствено въпрос на наша преценка.

Отклонението в геометрията на една повърхност от нейната идеална форма се класифицира в зависимост от нейното функционално предназначение. Различаваме основно два вида геометрия:

- макро топография
- микро топография.

В оптиката повърхностите се оценяват от гледната точка на дължината на вълната, с която се предполага, че ще работят. Не се допуска разликата в оптичните пътища между отделните лъчи, причинена от неравностите (фиг. 9.34), да надхвърля части от дължината на вълната (напр.: $\Delta L < \lambda / 4$ съгласно критерия на Рейли). В оптичката индустрия се задават стойности λ , $\lambda / 4$, $\lambda / 10$, $\lambda / 20$, а в най-добрите случаи - $\lambda / 100$. За работата на оптичната повърхност е от голямо значение:

- под какъв ъгъл пада снопа светлина и
- какво е взаимното разпределение височина на неравностите – период на “вълничките”. Средната стойност на наклона на грапавините оказва значително влияние върху функцията на оптичната повърхност.

От тази гледна точка разграничаваме следните три основни вида отклонения от формата (фиг. 9.33):

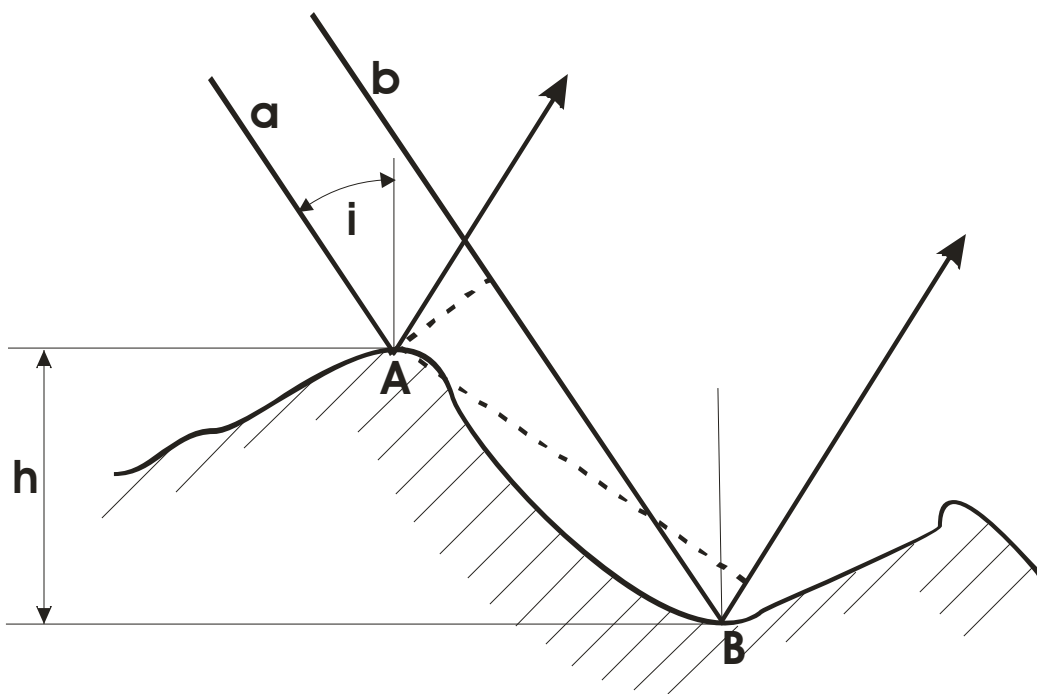
- А. Като базис служи номиналната (идеалната) форма на повърхността.
- Б. Върху нея е суперпонирана макро-топографията или “навълнеността”.
- В. А върху нея е насложена микро-топографията или “награпавеността”.

При базисната повърхност разликите във височините са раздалечени на милиметри до метри и много повече. При макро-топографията (навълнеността) пиковете са по-малки и са отдалечени (имат период) на максимум няколко милиметра. Награпавеността на оптичните повърхности се отличава с височина на пикчетата до 10^{-6} Å и надлъжна периодичност от по-малка до значително по-малка от 1 мм. Повърхностните грапавини причиняват разсейване на светлината в оптичните уреди, а също могат да увеличат поглъщането на лъчението. В IR областта механизмът е аномалния скин ефект, а във видимата и UV областта чрез възбуждане на повърхностни плазмони и различни резонансни механизми на

поглъщане. В качеството на статистически критерии за описание и количествена оценка на награвеността използваме следните параметри:

- средноаритметично отклонение R_a ,
 - средноквадратичното отклонение σ .
- $\sigma = 1,11R_a$ (усреднената стойност)
- $\sigma = (1.0-1.3)R_a$.

История:



Фиг. 9.34

Идеално полираните повърхности отразяват огледално.

1926г. Рейли и Енч

От награвена повърхност ще се наблюдава огледално отражение, ако е изпълнено условието на Рейли:

$$2h \cos \theta_c = \lambda / 4,$$

където h е средно-аритметичната стойност на височините на грапавините.

1956 г. Hasunuma u Nara:

Този метод е аналогичен на метода на Енч, но измерването е при ъгъл на падане $\theta > \theta_c$. Интензитетът на огледалната компонента расте по-бързо, в сравнение с предсказаното от формулите на Френел. Зависимостта е:

$$2h \cos \theta_c = \lambda / k,$$

$$\text{където } k = 2 \div 3$$

1961 г. Bennet, Porter :

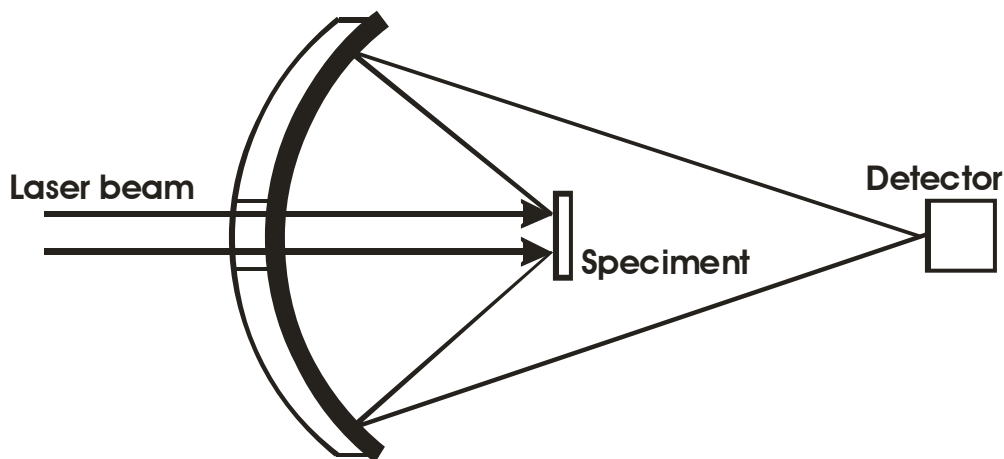
Този метод работи при нормално падане. Тогава коефициента на отражение от грапавата повърхност R_S е:

$$R_S = R_O \exp[-16\pi^2 \sigma^2 / \lambda^2],$$

където R_O е коефициента на отражение от идеално полирана повърхност. При този метод е необходим еталон за сравнение. Използват се следните стандартни стойности за $h = 0,062; 0,2; 0,8 \mu\text{m}$. При $R \geq 0,9$, формулата е достатъчно точна за повечето задачи в машиностроенето. Городинский разширява този метод сноп, падащ под произволен ъгъл i :

$$R_S = R_O \exp\left(-\frac{8\pi^2 \cos^2 i}{\lambda^2} \sigma^2\right)$$

Рефлектометърът на фирмата *Hilger* за контрол на повърхностната награваност е типичен пример за отражателен дифрактометър, обработващ краен диапазон от пространствени честоти, но извън нулевия дифракционен порядък. “Изпомпването” на енергия във висшите дифракционни порядъци благодарение на дифракцията на грапавините е механизъм съдържащ в себе си големи потенциални възможности за оценка на параметрите на случайната дифракционна решетка – повърхността. Необходима предварителна калибровка за определен диапазон на неравности. Тези уреди дават надеждни стойности и намират широко приложение в промишлеността.

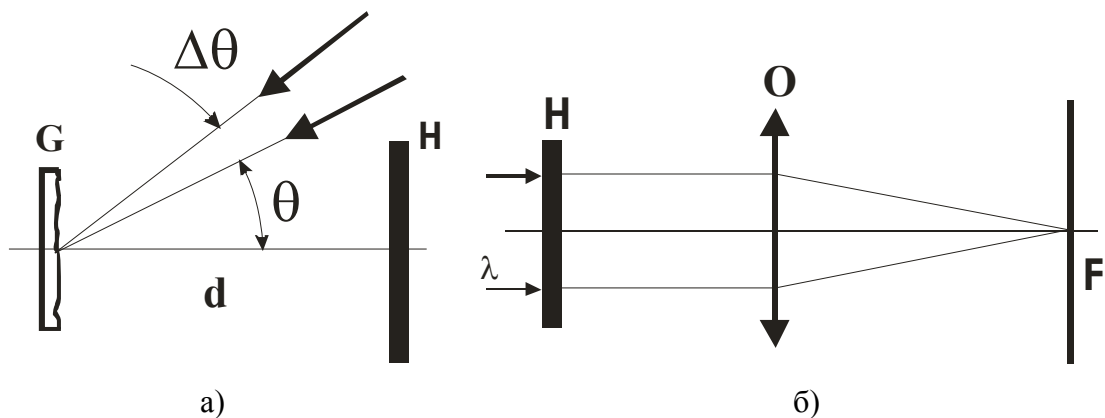


Фиг. 9.35

Прилагат се за повърхности в интервала 10-ти до 13-ти клас на грапавост, което означава $0,6$ до $0,05 \mu m$ (за амплитудата u_z).

Спекъл метод:

Този метод е двустъпален процес. На първият етап (фиг. 9.36а) се регистрира двукспозиционна холограма. За целта, изследвана повърхност се осветява под ъгъл на падане θ с колимиран сноп монохроматична светлина (от He-Ne лазер) и се извършва първата експозиция. След това ъгълът на падане се изменя с $\Delta\theta$ и повторно се експонира. Вторият етап е измерването чрез реконструкцията показана на Фиг. 9.36б. Във фокалната равнина F' на Фурие-обектива O се наблюдава система прави, успоредни ивици на Юнг. При малка стойност за $\Delta\theta$, периодът на ивиците е:



Фиг. 9.36

$$\xi_0 = (d \cos \theta) \Delta \theta.$$

При $\sigma > 1 \mu\text{m}$ контрастът се изразява с формулата:

$$\gamma = \exp \left\{ - [k(\sigma \sin \theta) \Delta \theta]^2 \right\}.$$

Относителната точност на този метод е от порядъка на $\Delta \sigma / \sigma = 0.08$. Методът е подходящ за по-груби повърхности.

ЗАДАЧИ

Задача №1: Далекоглед с $f' = 400\text{mm}$ е осветен с равнинна монохроматична вълна с $\lambda = 500\text{nm}$. Пред обектива е разположен амплитуден екран с енергетична пропускливост

$$T(\xi, \eta) = \Lambda^2 \left(\frac{\xi}{10} \right) \Pi \left(\frac{\eta}{50} \right)$$

където (ξ, η) е правоъгълна координатна система в равнината на екрана, с начало върху оптичната ос [дименсиите са в mm].

Изчислете отношението между интензитета I в т. Р, отместена на $x' = 5\mu\text{m}$ от геометричния образ P_0 на източника, към интензитета I_0 в образа P_0 .

Отг. $I / I_0 = 0,657$

Задача №2: Изчислете оптичната предавателна функция $\tilde{W}(\nu, \mu)$ на идеална оптична система с кръгла апертура и относителен отвор c . Системата работи със средна дължина на вълната $\bar{\lambda}$. Радиусът на изходната зеница е A , а разстоянието до равнината на образа R ($c = R / 2A$).

Приложение 1:

1. Теорема на Грийн

Теоремите на Грийн са система от три векторни диференциално-интегрални зависимости, които могат да бъдат изведени, тръгвайки от следните две векторни диференциални тъждества:

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \phi) \quad /A1/$$

и

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) \quad /A2/$$

където $(\nabla \cdot \mathbf{A})$ означава дивергенцията на полето, ∇ е неговият градиент, а

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

е лапласовия оператор, а $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ е скалярно произведение. От теоремата за дивергенцията (теоремата на Гаусс) следва, че

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} \quad /A3/$$

Замествайки с /A2/ в /A3/

$$\int_S \phi (\nabla \psi) \cdot d\mathbf{a} = \int_V [\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)] dV \quad /A4/$$

Това е първата теорема на Грийн.

Ако извадим /A2/ от /A1/, ще получим

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \quad /A5/$$

Тогава

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{a} \quad /A6/$$

Това е втората теорема на Грийн.

Нека скаларното поле u има непрекъснати първи частни производни и е хармонично вътре в областта на интегриране.

Тогава е **третата теорема на Грийн** гласи:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \left[\ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \right] ds \quad /A7/$$

2. Модел на извеждане на скаларната теория на дифракция

Нека са дадени две скаларни функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$. Тогава, съгласно втората интегрална теорема на Грийн (***Green's second identity***) (виж 1), в един обем V , ограничен от по части гладката повърхност S , важи:

$$\int_V (u \cdot \nabla^2 v - v \cdot \nabla^2 u) dV = \int_S (u \cdot \nabla v - v \cdot \nabla u) d\vec{S} \quad (B1)$$

Нека също така, u и v са решения на уравнението на Хелмхолц (*Helmholtz*), т. е. :

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (B2)$$

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0 \quad (B3)$$

където k е вълновото число. Замествайки от (B2) и (B3) в лявата страна на (B1) ще получим

$$\int_V (u \cdot \nabla^2 v - v \cdot \nabla^2 u) dV = \int_V [u \cdot (-k^2 v) - v \cdot (-k^2 u)] dV = 0 \quad (B4)$$

така, че за двойка скаларни функции с горните свойства важи:

$$\int_S (u \cdot \nabla v - v \cdot \nabla u) d\vec{S} = 0, \quad (B5)$$

където S е затворена повърхност, ограничаваща обема V .

Нека функциите u и v дефинираме като

$$u \equiv \psi \quad (B6)$$

$$v \equiv \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (B7)$$

където $\psi(x, y, z)$ е най-общо една скаларна функция (в нашето разглеждане тя е една от скаларните компоненти на полето), а r е радиус вектора до дадена точка. Тогава от (B1-B5) ще получим

$$\int_S \left[\psi \cdot \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \nabla \psi \right] d\vec{S} + \int_{S'} \left[\psi \cdot \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \nabla \psi \right] d\vec{S} = 0, \quad (B8)$$

където S' е малка сфера с център в сингулярната точка.
Ако представим първият член на подинтегралната функция като

$$\nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) \cdot e^{ikr} \cdot \vec{n}, \quad (B9)$$

то, тъй като

$$\vec{n} \cdot d\vec{S} = r^2 d\Omega \quad (B10)$$

то вторият член придобива вида

$$\nabla \psi \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot r^2 \cdot d\Omega \quad (B11)$$

Крайният вид на вторият интеграл е

$$\int_{S'} \left(\psi - ik\psi r + r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \cdot e^{ikr} \cdot d\Omega \quad (B12)$$

В граничен преход, при $r \rightarrow 0$,

$$\int_{S'} \left(\psi - ik\psi r + r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \cdot e^{ikr} \cdot d\Omega = \int_S \psi \cdot d\Omega = 4\pi\psi_P \quad (B13)$$

Ако заместим с (B13) в (B8), то

$$\psi_P = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\psi \cdot \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \nabla \psi \right) \cdot d\vec{S} \quad (B14)$$

Това е познатия **интеграл на Хелмхолц-Кирхоф** (*Helmholtz-Kirchhoff integral*), който може да бъде записан със или без знака минус.

Нека разгледаме сферична падаща вълна

$$\psi = A \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \quad (B15)$$

В сферични координати, за функции със сферична (централна) симетрия, важи, че

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \vec{r} \quad (\text{B16})$$

$$\nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{ikr e^{ikr} - e^{ikr}}{r^2} \cdot \vec{r} = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \cdot e^{ikr} \cdot \vec{r} \quad (\text{B17})$$

$$\nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) = \frac{ikR e^{ikR} - e^{ikR}}{R^2} \cdot \vec{R} = \left(\frac{ik}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \cdot e^{ikR} \cdot \vec{R} \quad (\text{B18})$$

тогава (B15) ще има вида

$$\psi_P = -\frac{A}{4\pi} \int_S \left[\frac{e^{ikR}}{R} \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \cdot e^{ikr} \cdot \vec{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{ik}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \cdot e^{ikR} \cdot \vec{R} \right] \cdot d\vec{S} \quad (\text{B19})$$

Ако пренебрегнем r^{-2} и R^{-2} спрямо по-големите r^{-1} и R^{-1} , то

$$\psi_P = -\frac{A}{4\pi} \int_{(S)} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \cdot \frac{ik}{r} \cdot e^{ikr} \cdot \vec{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{ik}{R} \cdot e^{ikR} \cdot \vec{R} \right) \cdot d\vec{S} = -i \frac{A}{4\pi} \int_{(S)} \frac{e^{ik(r+R)}}{Rr} \cdot (\vec{r} - \vec{R}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{B20})$$

Този резултат е известен като **дифракционният интеграл на Френел-Кирхоф** (*Fresnel-Kirchhoff diffraction integral*).

Ако падащата вълна е плоска, то комплексната и амплитуда е константна за целият вълнов фронт

$$\psi = A \frac{e^{ikR}}{R} \equiv \psi_0 \quad (\text{B21})$$

и тогава

$$\psi_P = -i \frac{\psi_0}{2\lambda} \int_{(S)} \frac{e^{ikr}}{Rr} (\vec{r} - \vec{R}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{B22})$$

Забележка: В частния случай, когато фазовия вълнов фронт е успореден на екрана

$$\vec{R} \cdot \vec{n} = 1 \quad (\text{B23})$$

Също така, ако развием скаларното произведение

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = -\cos \theta', \quad (\text{B24})$$

то уравнение (B22) приема вида

$$\psi_P = -i \frac{\psi_0}{2\lambda} \int_{R,r} \frac{e^{ikr}}{R,r} (1 + \cos \theta') \cdot dx' \cdot dy' \quad (B25)$$

Това уравнение е валидно, когато $D = \frac{(\text{Надлъжен размер})_{\max}}{(\text{Напречен размер})_{\max}} \gg 1$. Множителят

$(1 + \cos \theta')$ се нарича **Стоксов фактор на наклона** (Stokes' inclination factor) и автоматично елиминира проблема с обратно разпространяващите се вълни от теорията на Хюйгенс.

Нека извършим субституцията

$$\begin{aligned} r &\approx R + \frac{1}{2R} \left[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 \right] = R + \frac{1}{2R} (x'^2 - 2xx' + x^2 - 2yy' + y^2) \approx \\ &\approx R + \frac{1}{2R} (x'^2 - 2xx' + y'^2 - 2yy') = R + \frac{x'^2 + y'^2}{2R} - \frac{xx' + yy'}{R} \end{aligned} \quad (B26)$$

и, ако приемем, че

$$\cos \theta' \approx 1, \quad (B27)$$

то уравнение (B25) добива вида

$$\psi_P = -\frac{i\psi_0 e^{ikR}}{\lambda R} \iint \exp \left[-ik \cdot \left(\frac{xx' + yy'}{R} - \frac{x'^2 + y'^2}{2R} \right) \right] dx' dy' \quad (B28)$$

при $D \gg a$, (където a е радиуса на дифракционната апертура).

Ако означим константата като

$$C = -\frac{i\psi_0 e^{ikR}}{\lambda R} \quad (B29)$$

комплексната амплитуда на дифрактиралото поле ще бъде

$$\psi_P = C \iint \exp \left[-ik \left(\frac{xx' + yy'}{R} - \frac{x'^2 + y'^2}{2R} \right) \right] dx' dy', \quad (B30)$$

а неговият интензитет е

$$I_{diff} = |\psi_P|^2 \quad (B31)$$

